

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELLA TUSCIA DI VITERBO

DIPARTIMENTO GEMINI

CORSO DI DOTTORATO DI RICERCA

IN MECCANICA AGRARIA XIX CICLO.

TITOLO TESI DI DOTTORATO DI RICERCA

**METODOLOGIE SPERIMENTALI DI OTTIMIZZAZIONE DEI PROCESSI
DI GASSIFICAZIONE DI BIOMASSE**

sigla del settore scientifico-disciplinare
AGR/09

Coordinatore: Prof. Ing. Danilo Monarca

Dottorando: Paolo Moretti

**A DEBORAH, IL MIO SOGNO DI AMORE
E LIBERTÀ, IL MIO ORIZZONTE INFINITO,
L'ABBRACCIO FRA ALBA E TRAMONTO;
L'EMOZIONE DI ESSER VIVI.**

**AI MIEI CARI PER IL LORO SOSTEGNO
E AFFETTO**

ABSTRACT

This Publication illustrates the Experimental Methodologies used mostly to optimize processes, such as:

- Factorial Plans Methodology;
- Robust Design, due to G. Taguchi, finalized to optimize processes and designs by defining the Signal to Noise ratio (S/N);
- Response Surface Methods, also applied in Dual Response Systems (DRS) problems characterized by the dual Target of optimizing both Medium Response and Variability.

Gasification of Biomass Residues is an important Energy source both for economical and environmental reasons.

It's illustrated a Gasification Multireactor plant designed and built in Gallese, a little town close to Viterbo, whose Patent belongs to Dr. Alessandro Mariani, a Mechanical Engineer, and Angelo Mariani.

The aim of this Publication is elaborating an Optimizing Experimental Strategy of Gasification Multireactor's process, treated as a (DRS).

NIMBUS software, freely available on the web at <http://www.nimbus.mit.jyu.fi> is the algorithm used to get the optimal parameters' values.

INDICE

INTRODUZIONE		Pag. 6
CAPITOLO I	LA GASSIFICAZIONE	Pag. 7
§ 1.1	RUOLO DELLA GASSIFICAZIONE NELLA PRODUZIONE DI ENERGIA.	Pag. 7
§ 1.2	DESCRIZIONE DEL PROCESSO DI GASSIFICAZIONE	Pag. 10
§ 1.2.1	ESSICCAZIONE	Pag. 11
§ 1.2.2	PIROLISI	Pag. 11
§ 1.2.3	OSSIDAZIONE	Pag. 12
§ 1.2.4	RIDUZIONE	Pag. 13
CAPITOLO II	SPERIMENTAZIONE FATTORIALE	Pag. 15
§ 2.1	SPERIMENTAZIONE, STRUMENTO PER LA DETERMINAZIONE DEL MODELLO MATEMATICO RAPPRESENTATIVO DELLA RISPOSTA DI UN SISTEMA	Pag. 15
§ 2.2	INTRODUZIONE AI PIANI SPERIMENTALI FATTORIALI	Pag. 17
§ 2.3	ESEMPIO DI UN PIANO SPERIMENTALE FATTORIALE A DUE LIVELLI	Pag. 18
§ 2.3.1	CALCOLO DEGLI EFFETTI PRINCIPALI E DELLE INTERAZIONI FRA I PARAMETRI	Pag. 20
§ 2.3.2	FORMULAZIONE DEL MODELLO MATEMATICO	Pag. 26
§ 2.3.3	ANALISI STATISTICA DEL MODELLO SPERIMENTALE	Pag. 27

	§ 2.3.4	IMPIEGO DEL MODELLO INTERPRETATIVO DEL SISTEMA: OTTIMIZZAZIONE	Pag. 39
	§ 2.4	ANALISI DELLA VARIANZA (ANOVA)	Pag. 42
	§ 2.4.1	ESEMPIO DI APPLICAZIONE DELL'ANOVA NELLA VALIDAZIONE DI UN PIANO SPERIMENTALE FATTORIALE CON RIPETIZIONI.	Pag. 42
	§ 2.5	PIANI SPERIMENTALI FATTORIALI FRAZIONATI	Pag. 49
	§ 2.5.1	APPLICAZIONE DI UN PIANO SPERIMENTALE FATTORIALE FRAZIONATO	Pag. 49
	§ 2.6	NATURA ITERATIVA DEL PIANO SPERIMENTALE	Pag. 55
CAPITOLO III		ROBUST DESIGN	Pag. 56
	§ 3.1	PROGETTARE IL SISTEMA RENDENDOLO INSENSIBILE AI DISTURBI (CAUSE DI VARIAZIONE NON CONTROLLABILI)	Pag. 56
	§ 3.1.1	PROGETTO DEL SISTEMA	Pag. 56
	§ 3.1.2	PROGETTO DEI PARAMETRI	Pag. 56
	§ 3.1.3	PROGETTO DELLE TOLLERANZE	Pag. 57
	§ 3.2	ROBUST DESIGN DI UNA CELLA DI CARICO	Pag. 57
	§ 3.2.1	PROGETTO DEI PARAMETRI E DELLE TOLLERANZE DEL PONTE DI WHEATSTONE.	Pag. 57
	§ 3.3	CRITICA AL ROBUST DESIGN DI TAGUCHI	Pag. 74

CAPITOLO IV	METODO DELLA SUPERFICIE DI RISPOSTA	Pag. 75
§ 4.1	LA SUPERFICIE DI RISPOSTA DI UN PROCESSO: DETERMINAZIONE DEI VALORI OTTIMALI DEI PARAMETRI	Pag. 75
§ 4.2	RAPIDO AVVICINAMENTO ALLE CONDIZIONI OTTIMALI (STEEPEST ASCENT)	Pag. 76
§ 4.3	ANALISI DEL SECONDO ORDINE (RIDGE ANALYSIS)	Pag. 87
§ 4.3.1	ANALISI DELLA SUPERFICIE DI RISPOSTA NELL'INTORNO DEL PUNTO DI DERIVATA NULLA	Pag. 93
§ 4.4	REQUISITI DEI PIANI SPERIMENTALI PER LA DETERMINAZIONE DEI MODELLI ANALITICI RAPPRESENTATIVI DELLA SUPERFICIE DI RISPOSTA DI UN SISTEMA	Pag. 96
§ 4.5	OTTIMIZZAZIONE COMBINATA DEL VALOR MEDIO E DELLA VARIANZA DELLA RISPOSTA DEL PROCESSO	Pag. 97
§ 4.5.1	ANALISI DELLE SUPERFICI DI RISPOSTA NEGLI INTORNI DEI PUNTI DI DERIVATA NULLA	Pag. 107
§ 4.5.2	METODO GRAFICO PER LA RICERCA DELLE CONDIZIONI OTTIMALI	Pag. 111
CAPITOLO V	ANALISI DI PROCESSI DI GASSIFICAZIONE DELLE BIOMASSE	Pag. 117
§ 5.1	TIPOLOGIE DI IMPIANTI DI GASSIFICAZIONE DELLE BIOMASSE	Pag. 117
§ 5.1.1	REATTORI A LETTO FISSO	Pag. 117
§ 5.1.2	REATTORI A LETTO FLUIDO	Pag. 119
§ 5.1.3	REATTORI A LETTO TRASCINATO	Pag. 121

§ 5.2	IMPIANTO MULTIREATTORE DI GASSIFICAZIONE DELLE BIOMASSE (BREVETTO DELL'ING. ALESSANDRO MARIANI E DI ANGELO MARIANI)	Pag. 122
§ 5.2.1	DESCRIZIONE DELL'IMPIANTO EDM 001	Pag. 123
§ 5.2.2	OTTIMIZZAZIONE DELL'IMPIANTO EDM 001	Pag. 131
	CONCLUSIONI	Pag. 150
	RINGRAZIAMENTI	Pag. 153
	BIBLIOGRAFIA	Pag. 154

INTRODUZIONE

Il presente studio tratta delle metodologie di ottimizzazione dei processi, basate su applicazioni della scienza statistica.

In particolare sono illustrati:

- la sperimentazione fattoriale;
- il Robust Design di Genichi Taguchi, finalizzato all'ottenimento di prodotti e processi robusti nei riguardi delle cause di variabilità;
- il metodo della superficie di risposta;
- la metodologia dell'ottimizzazione ambivalente, finalizzata al conseguimento dell'obiettivo con il contenimento della variabilità.

Si decide di trattare la gassificazione di biomasse per la sempre maggiore attrattiva che riveste nell'ambito delle fonti energetiche rinnovabili, determinata dalla disponibilità e dal basso costo delle materie necessarie per il processo. Un ulteriore importante fattore di predilezione è il contenuto impatto ambientale: in condizioni di ottimale carburazione del motore endotermico alimentato dal syngas di biomassa, ciò che viene emesso nell'atmosfera è unicamente vapor acqueo e anidrite carbonica. Nel caso di gassificazione di scarti vegetali, quali resti di potatura, si verifica la medesima emissione di CO₂ che si sarebbe verificata per effetto della fotosintesi clorofilliana.

Qualora si riescano a ottimizzare le caratteristiche del syngas, minimizzandone la variabilità, si è realmente in grado di ottimizzare le emissioni del motore del gruppo elettrogeno.

Si illustra, infine nel dettaglio un impianto in grado di fornire potenza elettrica di 25 kW che si distingue nell'ambito degli impianti di costo contenuto, in cui l'elemento di gassificazione è l'aria, per la concreta opportunità di ottimizzare ogni fase del processo

CAPITOLO PRIMO

LA GASSIFICAZIONE

§ 1.1 RUOLO DELLA GASSIFICAZIONE NELLA PRODUZIONE DI ENERGIA.

La gassificazione è un processo chimico che determina la volatilizzazione di un combustibile solido.

L'energia chimica della sostanza solida iniziale dà luogo ad un gas, che può alimentare un impianto motore termico (motore alternativo endotermico, turbina a gas) o una cella a combustibile, producendo energia.

La gassificazione può interessare il carbon fossile, gli scarti solidi delle lavorazioni petrolifere, le biomasse e i rifiuti solidi urbani.

Considerata la contingente emergenza in una regione del nostro paese, è di notevole attualità parlare di termovalorizzazione di rifiuti, i quali sono adatti ad essere gassificati solo a seguito di trattamenti preliminari di rimozione degli elementi inerti (vetro e metalli), e di omogeneizzazione, al fine dell'ottenimento di un'accettabile efficienza del processo. Quest'ultima è definita dal rendimento di gassificazione(η_g), rapporto tra il contenuto energetico del gas prodotto e il contenuto energetico del combustibile solido impiegato nel processo:

$$\eta_g = 100 \cdot \frac{Q_{gas} \cdot H_{gas}}{M_{solido} \cdot H_{solido}}$$

essendo:

Q_{gas}	portata volumetrica del gas prodotto [Nm^3/h]
M_{solido}	portata massica del combustibile solido [kg/h]
H_{gas}	Potere calorifico inferiore del gas [kJ/Nm^3]
H_{solido}	Potere calorifico inferiore del materiale trattato [kJ/kg]

Il rendimento di gassificazione è tanto più elevato quanto più alta è la conversione del calore sensibile (sviluppato internamente o apportato all'esterno) in calore latente (potere calorifico del gas prodotto).

In dipendenza del tipo e del design del gassificatore, come delle caratteristiche dell'elemento solido immesso, il rendimento di gassificazione può variare tra 60 e 85%.

Una prima classificazione degli impianti per la produzione di gas può essere fatta in funzione del contenuto calorifico del gas prodotto. Si possono così distinguere:

1. *impianti per la produzione di gas a basso contenuto calorifico* (GBCC): il gas prodotto da questo tipo di impianti è caratterizzato da un potere calorifico di circa 5000 kJ/Nm^3 . I processi per la produzione di gas BCC sono generalmente semplici, utilizzano l'aria come agente gassificatore e non necessitano di impianti supplementari per la preparazione dell'agente di gassificazione. Il gas ottenuto presenta un elevato contenuto di azoto (circa 60%, gas inerte), è conosciuto come *gas povero* e può essere usato in modo economicamente conveniente solo presso il luogo di produzione;
2. *impianti per la produzione di gas a medio contenuto calorifico* (GMCC): caratterizzato da un potere calorifico prossimo a 14000 kJ/Nm^3 . I processi per la produzione di gas GMCC sono più complessi rispetto a quelli per il gas GBCC in quanto utilizzano come agente gassificante ossigeno o aria arricchita in ossigeno; necessitano, quindi, di impianti supplementari per il frazionamento dell'aria e l'ottenimento di ossigeno. Il gas ottenuto ha un basso contenuto di azoto e può essere utilizzato in luoghi distanti da quello di produzione;
3. *impianti per la produzione di gas ad alto contenuto calorifico* (GACC) o *gas naturale di sintesi* (SNC): sono gli impianti che permettono di ottenere le più alte potenzialità energetiche per il gas prodotto, il potere calorifico risulta dell'ordine di 33000 kJ/Nm^3 . I processi per la produzione di gas GACC o SNC sono attualmente di interesse solo negli Stati Uniti. Tali caratteristiche sono possibili grazie all'elevata resa in metano del processo. Il gas prodotto è utile come vettore energetico in località lontane dal luogo di produzione, potendo essere distribuito in rete.

I processi si distinguono in base all'elemento gassificante.

Il processo è diretto se l'agente gassificante è anche agente ossidante. In tal caso la parziale ossidazione della combustibile solido (tra il 12 ed il 30 %) fornisce l'energia per la conversione della parte restante.

Gli elementi della gassificazione diretta possono essere:

- l'aria;
- l'ossigeno puro.

Nel processo indiretto, l'agente gassificante non contiene ossigeno, ed è necessaria una fonte energetica esterna.

L'agente gassificante è comunemente il vapore, che determina un considerevole incremento della frazione di idrogeno nel gas.

Nei processi di gassificazione indiretta e ad ossigeno puro, il gas prodotto, non essendo diluito dall'azoto contenuto nell'aria, dà luogo ad un maggiore potere calorifico.

Processi	Agente gassificante	Potere calorifico inferiore (MJ/Nm ³)
Gassificazione diretta comune	Aria	4-7
Gassificazione diretta ad ossigeno puro	Ossigeno	10-12
Gassificazione indiretta	Vapore	15-20

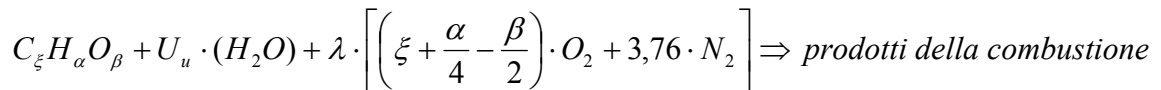
§ 1.2 DESCRIZIONE DEL PROCESSO DI GASSIFICAZIONE

La gassificazione ha luogo in un ambiente povero di ossigeno, presente in quantità pari a circa un quarto a quella occorrente alla combustione completa in condizioni stechiometriche. Il materiale da trattare è soggetto ad una combustione incompleta ad alta temperatura, la quale, oltre ad un residuo solido (catrami e ceneri), dà origine a una miscela gassosa di alta energia dei seguenti elementi:

- monossido di carbonio;
- idrogeno;
- anidride carbonica;
- azoto;
- metano.

La composizione tra i vari componenti varia notevolmente in funzione dei diversi tipi di gassificatori e delle diverse tipologie di combustibili solidi. Un fattore che influenza sensibilmente la composizione del gas prodotto, e quindi del suo potere calorifico, è l'umidità contenuta nell'elemento solido in ingresso.

L'equazione globale della reazione di gassificazione è la seguente:



essendo:

U_u	umidità assoluta dell'elemento solido di ingresso
α, β, ξ	coefficienti a valori interi
λ	rapporto fra l'aria effettivamente coinvolta nel processo e quella stechiometrica, necessaria per la combustione completa

A seconda del valore del rapporto λ si ha:

$\lambda > 1$	processo di combustione
$\lambda < 1$	processo di pirolisi

Per la pirolisi, generalmente: $\lambda = 0,25 \div 0,3$.

Il processo di gassificazione è composto da quattro diverse fasi:

1. essiccazione;
2. pirolisi;
3. combustione;
4. riduzione.

Questi processi si possono pensare localizzati in diverse zone del gassificatore. In effetti, i confini di tali zone non sono netti, ma sono presenti delle zone di sovrapposizione che in ogni modo non inficiano la validità dello studio semplificato del processo complessivo.

Il processo è inizialmente endotermico, e pertanto richiede energia di attivazione. Una volta a regime, la reazione diviene esotermica e si autosostiene.

§ 1.2.1 ESSICCAZIONE

È la prima fase della gassificazione; questo processo endotermico consiste nell'evaporazione dell'acqua presente nel materiale come umidità ed avviene nell'intervallo di temperatura: $70^{\circ}\text{C} \div 150^{\circ}\text{C}$. A regime, il calore necessario al verificarsi di tale fase è ottenuto a spese di quello sviluppato nella zona di combustione.

Al fine di evitare un'eccessiva diminuzione della temperatura nella zona in cui si verifica l'essiccazione, l'umidità presente nel combustibile non deve superare il 30% in peso.

In questa fase comincia l'eliminazione dei componenti volatili presenti nel combustibile.

§ 1.2.2 PIROLISI

La somministrazione di calore in ambiente inerte decompone le molecole complesse della sostanza organica in molecole di basso peso molecolare.

Fattori determinanti sono:

- la pressione;
- la temperatura;
- la velocità di riscaldamento del materiale;
- il tempo di permanenza nella zona di reazione;
- le perdite di calore.

Nell'intervallo di temperatura: dei 200°C ÷ 280°C si ha la formazione di radicali liberi carbonilici, con la conseguente emissione d'ossido di carbonio, anidride carbonica, vapor d'acqua, acido acetico e metanolo.

Al raggiungimento dei 280°C, si ha la rottura dei legami C-C e C-O (decarbonilazione e decarbossilazione) e la produzione di gas e idrocarburi ad elevato peso molecolare (catrami).

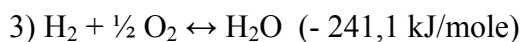
È una reazione endotermica che origina reazioni di combustione per la presenza di ossigeno libero. Il processo è quindi globalmente neutro o leggermente esotermico.

L'incremento della temperatura fino a 500°C ÷ 700°C determina una riduzione della produzione di gas, che in tale fase è principalmente costituito da idrogeno.

A completamento del processo, si ha una fase solida impoverita di materie volatili (carbonio fisso) che continua ad interagire con la fase gassosa.

§ 1.2.3 OSSIDAZIONE

Si realizza nei punti dove viene insufflata l'aria e, dal momento che la quantità di ossigeno introdotta è inferiore a quella stechiometrica ($\lambda < 1$), interessa solamente una parte del combustibile presente. Le principali reazioni che avvengono durante la combustione:



determinano un incremento della temperatura fino ad un valore di circa 1450°C.

L'energia termica che per effetto di queste si genera è fondamentale per assicurare il regolare decorso dell'intero processo di gassificazione.

L'elevata temperatura, limitata per non sollecitare eccessivamente la struttura dell'impianto, assicura una veloce essiccazione dello scarto e una pirolisi completa.

L'ossidazione dà origine ad un gas composto essenzialmente da CO₂ e vapor acqueo; quest'ultimo è dovuto alle reazioni chimiche di ossidazione e all'umidità rimasta nel combustibile.

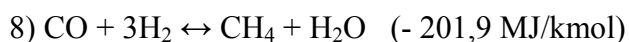
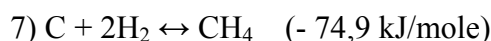
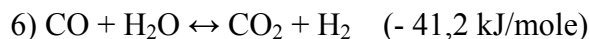
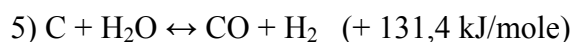
Il vapore che si sviluppa dalle reazioni di combustione contribuisce alla produzione di energia termica, mentre quello che è dovuto all'umidità del combustibile, necessitando di un apporto termico per l'evaporazione, causa una diminuzione della temperatura, rallentando i processi.

La minore entalpia sensibile posseduta dal vapore acqueo e dall'anidride carbonica formata nell'ossidazione, rende disponibile una minor quantità di energia per la successiva reazione di riduzione.

§ 1.2.4 RIDUZIONE

Una volta che l'ossigeno presente è stato completamente esaurito, la miscela gassosa e il carbone solido residuo reagiscono tra loro, dando così origine al gas che è il prodotto finale della gassificazione.

In questa fase avvengono le seguenti reazioni:



Le reazioni di riduzione dell'anidride carbonica e dell'acqua determinano un abbassamento della temperatura.

La reazione esotermica che dà luogo alla formazione di metano è favorita da un valore basso della temperatura, non ottimale per il processo di gassificazione. Un'elevata produzione di metano indica un'anomalia di funzionamento dell'impianto.

La reazione (4) implica la riconversione dell'anidride carbonica in monossido di carbonio, dovuta all'ossidazione parziale del C (2). Questa reazione è di notevole importanza nel caso in cui l'agente gassificante sia aria. Infatti, se l'equilibrio si sposta troppo nella direzione di formazione di CO si ha un

innalzamento troppo elevato della temperatura, se invece l'equilibrio si sposta eccessivamente verso la formazione di CO_2 , il gas prodotto ha un potere calorifico troppo basso per la povertà di ossido di carbonio.

Introducendo, come agente gassificante il vapore, provocando la reazione endotermica (5) si ottiene un gas a più elevato potere calorifico. Per alcune biomasse l'acqua, occorrente per la (5), deriva dall'umidità e dall'acqua di costituzione.

Insieme alla reazione (5) può avvenire anche la cosiddetta reazione di shift del CO (6), con conseguente aumento della percentuale di H_2 nel gas e che descrive il così detto equilibrio acqua-gas.

Per ciascuna temperatura, il rapporto tra il prodotto della concentrazione del monossido di carbonio (CO) e del vapor d'acqua (H_2O) con il prodotto della concentrazione del biossido di carbonio (CO_2) e dell'idrogeno (H_2) è fissato dal valore della costante di equilibrio acqua-gas (K_{WE}). In pratica, la composizione di equilibrio del gas viene raggiunta solo nel caso in cui la percentuale e il tempo di reazione è sufficiente.

La percentuale di reazione decresce con l'abbassarsi della temperatura. Nel caso dell'equilibrio acqua-gas, la percentuale di reazione, al di sotto dei 700°C , diventa così bassa che la composizione del gas rimane invariata.

La formazione del metano segue le leggi (7) e (8). Da un punto di vista termodinamico tali leggi risultano favorite dalle basse temperature ed alte pressioni. Se l'impianto lavora a pressione atmosferica, come spesso viene imposto dalla pericolosità del gas prodotto, le relazioni precedenti si verificherebbero in modo apprezzabile solo per temperature molto più basse di quelle presenti nella zona di reazione: la presenza di CH_4 testimonia un non completo reforming dei distillati del combustibile o una temperatura eccessivamente bassa nel gassificatore.

In un gassificatore le condizioni di equilibrio non si raggiungono praticamente mai. La velocità di reazione dell'anidride carbonica o del vapor d'acqua che transita sul carbone incandescente aumenta con l'aumentare della temperatura e solo a 1200°C è sufficientemente elevata da consentire gli equilibri nei tempi ridotti a disposizione. Normalmente la temperatura di regime dei gassificatori a legna o a carbone da legna non supera i 900°C .

CAPITOLO SECONDO

SPERIMENTAZIONE FATTORIALE

§ 2.1 SPERIMENTAZIONE, STRUMENTO PER LA DETERMINAZIONE DEL MODELLO MATEMATICO RAPPRESENTATIVO DELLA RISPOSTA DI UN SISTEMA

Il controllo di un sistema, quale può essere un processo di gassificazione di biomasse, implica la facoltà di determinarne la risposta al variare dei fattori d'influenza. È di fondamentale importanza la determinazione di questi ultimi.

Siano tali grandezze rappresentati dalle variabili: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$;

sia y la grandezza fisica rappresentativa della risposta del sistema, si deve determinare l'espressione analitica:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Il processo di determinazione del modello matematico è iterativo e si articola nelle seguenti fasi:

1. elaborazione di un primo modello di tentativo;
2. pianificazione di un adeguato esperimento;
3. adattamento dell'espressione matematica del modello ai dati rilevati nell'esperimento;
4. analisi della validità del modello.

Esempi di modelli matematici di tentativo, nel caso di due sole grandezze di influenza, sono i seguenti:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$$

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2$$

Scelto il modello, vengono di conseguenza pianificati gli esperimenti.

In base ai risultati sperimentali, vengono determinati i coefficienti del modello.

L'analisi statistica dei risultati ottenuti valida il modello ottenuto, in quanto dà la risposta ai due quesiti:

- Sono tutti i termini inclusi nel modello necessari?
- Sono i termini inclusi nel modello sufficienti?

Qualora per il secondo quesito si ottenga una risposta negativa, sono necessarie le seguenti misure, adottabili in coppia o singolarmente:

- l'inserimento di termini algebrici di grado maggiore se si ritengono apprezzabili effetti del secondo, del terzo ordine o più elevati;
- la ricerca di ulteriori parametri d'influenza del processo.

Generalmente è efficace singolarmente la seconda opportunità: trovati altri fattori influenzanti la risposta del sistema, viene reiterato il procedimento.

Implicitamente si è lasciato intendere che i parametri determinanti per un processo siano tutte grandezze fisiche quantitative, rappresentabili da variabili continue. Frequentemente hanno un ruolo determinante anche fattori qualitativi, quali possono essere ad esempio la presenza o meno di un elemento, la sua modalità

di montaggio, il turno di lavoro in cui viene realizzato, il livello di specializzazione della manodopera.

§ 2.2 INTRODUZIONE AI PIANI SPERIMENTALI FATTORIALI

Un valido piano sperimentale deve soddisfare i seguenti requisiti:

1. possibilità di trattare sia grandezze quantitative che fattori qualitativi;
2. possibilità di osservare gli effetti dei cambiamenti dovuti alla variazione di ogni singolo fattore;
3. possibilità di rilevare le interdipendenze fra i diversi fattori mediante l'osservazione degli effetti delle variazioni di un parametro, in corrispondenza di tutte le possibili combinazioni dei valori degli altri;
4. minimizzazione della variazione nei risultati, indotta da fattori non controllabili;
5. possibilità di apprezzare l'entità dell'effetto dei fattori non controllabili.

Esigenze soddisfatte dai piani sperimentali fattoriali, nei quali viene preso in esame lo stesso numero limitato di livelli per ogni fattore d'interesse. Comunemente si adottano esperimenti a due o a tre livelli, corrispondenti a modelli matematici di basso grado. Tipicamente all'inizio di un'analisi sperimentale, viene adottato un modello interpretativo che non considera gli effetti quadratici delle grandezze fisiche. A tale modello corrisponde un piano sperimentale fattoriale a due livelli.

§ 2.3 ESEMPIO DI UN PIANO SPERIMENTALE FATTORIALE A DUE LIVELLI

In un'officina meccanica si desidera ottimizzare la tornitura di un componente dell'assale di un erpice a dischi costruito dalla ditta MECUCCI di Montefiascone (Figg. 2.1 e 2.2). La sede del cuscinetto a rulli conici dev'essere lavorata con la tolleranza* indicata in Fig. 2.2 al fine di consentire un buon bloccaggio della ralla interna del cuscinetto che non ne pregiudichi l'operazione di calettamento.

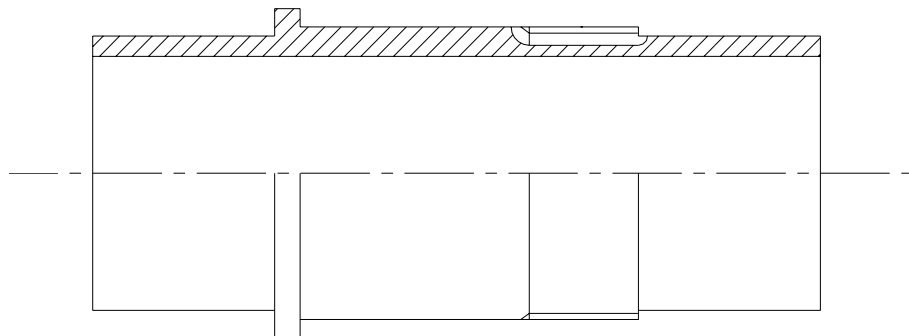


Fig. 2.1 Elemento dell'assale di un erpice a dischi

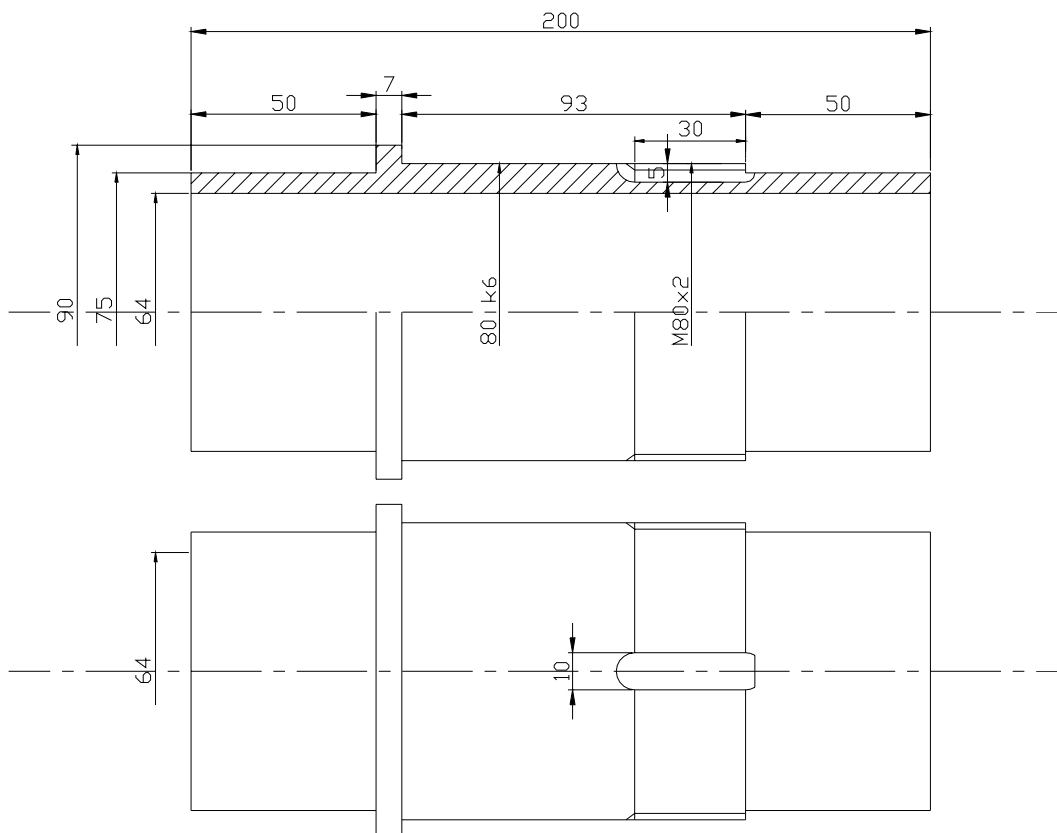


Fig. 2.2 Indicazione delle quote dell'elemento

* la tolleranza 80 K6 corrisponde a $80^{+21}_{+2} \mu m$: la sede ha diametro che può variare da un minimo di 80,002 mm a un massimo di 80,021 mm

Il calettamento è agevolato da una buona finitura superficiale. Nei primi pezzi ottenuti, la rugosità superficiale è superiore ai 3 μm , mentre si desidera ottenere, come massimo valore accettabile: 2,5 μm .

Viene eseguito un piano sperimentale fattoriale, intervenendo su tre parametri:

- x_1 : velocità di rotazione del mandrino;
- x_2 : velocità di avanzamento dell'utensile;
- x_3 : raggio di raccordo della punta dell'utensile.

Vengono scelti i seguenti livelli di tali fattori:

	livello - 1	livello + 1
x_1	2400 rpm	2600 rpm
x_2	0,13 mm/giro	0,26 mm/giro
x_3	0,4 mm	0,8 mm

Tali livelli sono estremi di intervalli che comprendono i valori inizialmente adottati dei parametri:

- $x_1 = 2500 \text{ rpm}$;
- $x_2 = 0,20 \text{ mm / giro}$;
- $x_3 = 0,4 \text{ mm}$

Il piano sperimentale prevede 2^3 esperimenti, quante sono le combinazioni ottenibili facendo variare il livello di ogni fattore.

I risultati sono i seguenti:

test	x_1	x_2	x_3	rugosità (μm)	ordine di esecuzione
1	-1	-1	-1	1,3	4
2	+1	-1	-1	1,6	2
3	-1	+1	-1	5,4	8
4	+1	+1	-1	5,2	5
5	-1	-1	+1	0,8	3
6	+1	-1	+1	0,7	7
7	-1	+1	+1	2,8	1
8	+1	+1	+1	2,7	6

Le diverse combinazioni sono ottenute cambiando ogni volta il segno nella colonna relativa al primo fattore, ogni due volte nella colonna del secondo parametro e ogni quattro volte nella colonna del terzo.

Dall'ultima colonna si evince che l'ordine d'esecuzione degli esperimenti è casuale.

Il ricorso alla casualizzazione riduce l'effetto di cause di variazione non considerate in quanto ignote o non controllabili.

Di altre cause di variazione note e controllabili, non incluse nelle tre prese in esame, viene neutralizzato l'effetto, mantenendole costanti negli otto test. Un'ulteriore sperimentazione può, in una seconda fase, determinarne gli effetti.

§ 2.3.1 CALCOLO DEGLI EFFETTI PRINCIPALI E DELLE INTERAZIONI FRA I PARAMETRI

Si calcolino gli effetti principali dei tre fattori.

§ 2.3.1.1 EFFETTO PRINCIPALE DELLA VELOCITÀ DI ROTAZIONE DEL MANDRINO

Il valore dell'effetto è stimato dal valore della media dei risultati ottenuti nelle coppie di test che differiscono solo per il livello di x_1 :

$$E_1 = \frac{1}{4} [(y_2 - y_1) + (y_4 - y_3) + (y_6 - y_5) + (y_8 - y_7)]$$

$$y_2 - y_1 = 1,6 \mu m - 1,3 \mu m = 0,3 \mu m$$

$$y_4 - y_3 = 5,2 \mu m - 5,4 \mu m = -0,2 \mu m$$

$$y_6 - y_5 = 0,7 \mu m - 0,8 \mu m = -0,1 \mu m$$

$$y_8 - y_7 = 2,7 \mu m - 2,8 \mu m = -0,1 \mu m$$

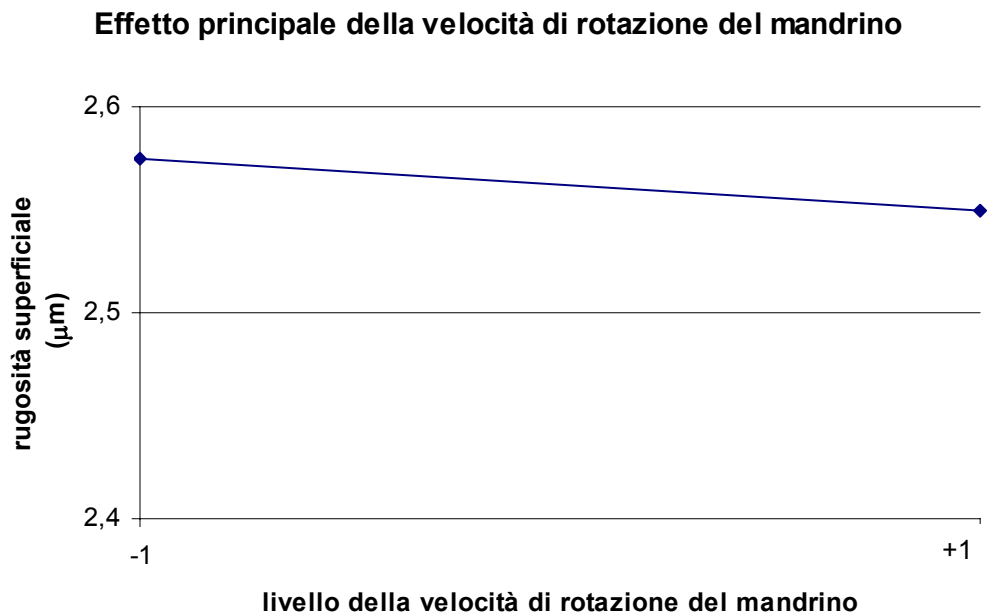
$$E_1 = \frac{1}{4} [-0,1 \mu m] = -0,025 \mu m$$

È evidente che il fattore ha una scarsa influenza, nel considerato intervallo di variazione (2400 rpm _ 2600 rpm).

Un'altra forma valida per l'espressione di E_1 è la seguente:

$$E_1 = \frac{y_2 + y_4 + y_6 + y_8}{4} - \frac{y_1 + y_3 + y_5 + y_7}{4}$$

L'effetto principale del fattore x_1 è stimato dalla differenza fra il valor medio dei dati relativi ai test caratterizzati da $x_1 = +1$ e la media dei risultati delle prove con $x_1 = -1$ (vedi grafico seguente).



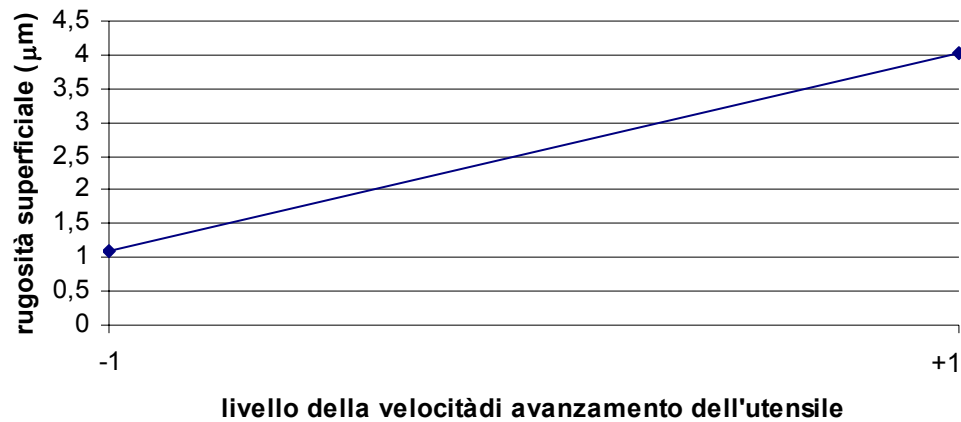
§ 2.3.1.2 EFFETTO PRINCIPALE DELLA VELOCITÀ DI AVANZAMENTO DELL'UTENSILE

Analogamente per il fattore x_2 , l'effetto principale risulta:

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{y_3 + y_4 + y_7 + y_8}{4} - \frac{y_1 + y_2 + y_5 + y_6}{4} = \\ &= \frac{5,4 + 5,2 + 2,8 + 2,7}{4} \mu m - \frac{1,3 + 1,6 + 0,8 + 0,7}{4} \mu m = 4,025 \mu m - 1,1 \mu m = \\ &= 2,925 \mu m \end{aligned}$$

È evidente il peggioramento della finitura superficiale del manufatto al crescere della velocità di avanzamento dell'utensile: risultati di gran lunga peggiori si hanno in corrispondenza del livello + 1 del fattore x_2 , relativo a 0,26 mm/giro (vedi grafico seguente).

Effetto principale della velocità di avanzamento dell'utensile



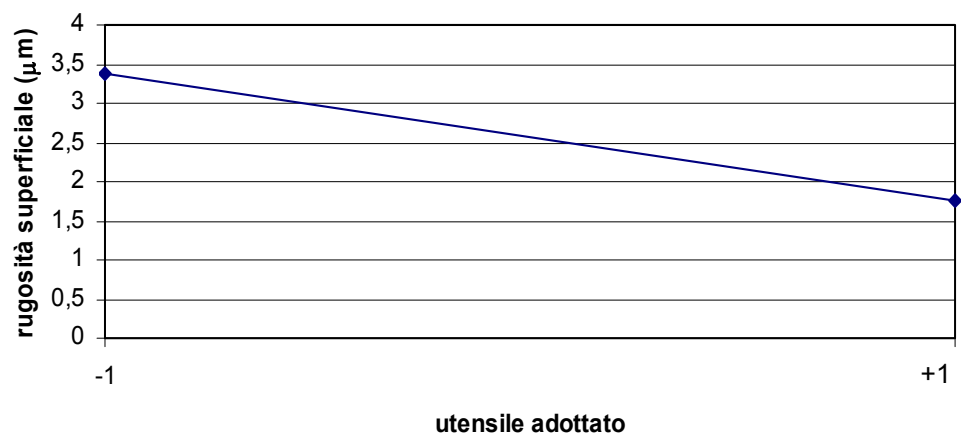
§ 2.3.1.3 EFFETTO PRINCIPALE DELLA SCELTA DELL'UTENSILE

Per il terzo fattore, la stima dell'effetto principale è la seguente:

$$\begin{aligned}
 E_3 &= \frac{y_5 + y_6 + y_7 + y_8}{4} - \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} = \\
 &= \frac{0,8 + 0,7 + 2,8 + 2,7}{4} \mu m - \frac{1,3 + 1,6 + 5,4 + 5,2}{4} \mu m = 1,75 \mu m - 3,375 \mu m = \\
 &= -1,625 \mu m
 \end{aligned}$$

Si constata un discreto miglioramento della finitura, dovuto alla sostituzione dell'utensile con un altro caratterizzato da una punta più arrotondata (vedi grafico seguente).

Effetto principale della scelta dell'utensile



§ 2.3.1.4 CALCOLO DELLE INTERAZIONI FRA I PARAMENTRI

L'effetto dovuto alla variazione del livello di un fattore è condizionato dal livello di un altro parametro, come si può constatare dalla seguente tabella:

	Prove in cui $x_1 = +1$ (test 2, 4, 6, 8)	Prove in cui $x_1 = -1$ (test 1, 3, 5, 7)
Effetto di x_2	$E_2^{x_1=+1} = \frac{1}{2}[(y_4 - y_2) + (y_8 - y_6)] = 2,8\mu m$	$E_2^{x_1=-1} = \frac{1}{2}[(y_3 - y_1) + (y_7 - y_5)] = 3,05\mu m$
	Prove in cui $x_3 = +1$ (test 5, 6, 7, 8)	Prove in cui $x_3 = -1$ (test 1, 2, 3, 4)
Effetto di x_1	$E_1^{x_3=+1} = \frac{1}{2}[(y_6 - y_5) + (y_8 - y_7)] = -0,1\mu m$	$E_1^{x_3=-1} = \frac{1}{2}[(y_2 - y_1) + (y_4 - y_3)] = 0,05\mu m$
	Prove in cui $x_3 = +1$ (test 5, 6, 7, 8)	Prove in cui $x_3 = -1$ (test 1, 2, 3, 4)
Effetto di x_2	$E_2^{x_3=+1} = \frac{1}{2}[(y_7 - y_5) + (y_8 - y_6)] = 2,00\mu m$	$E_2^{x_3=-1} = \frac{1}{2}[(y_3 - y_1) + (y_4 - y_2)] = 3,85\mu m$

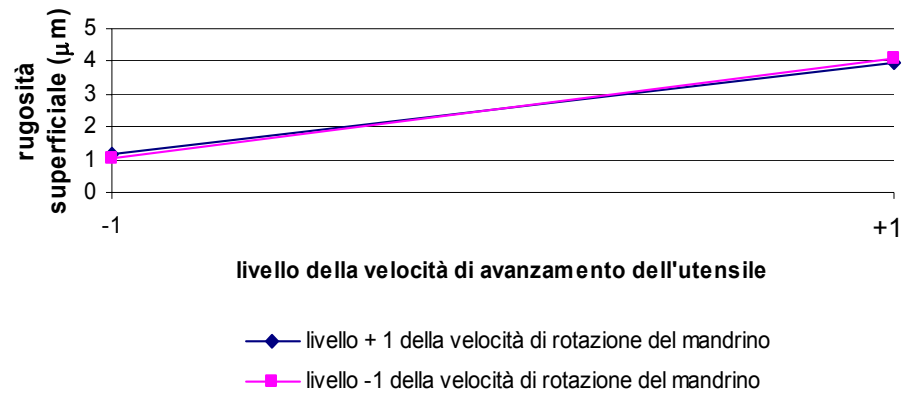
La semidifferenza fra i valori riportati in ciascuna riga della tabella stima l'interazione, visualizzata nel relativo grafico, fra i due fattori a cui si riferiscono le due celle della riga:

$$E_{12} = \frac{1}{2}(E_2^{x_1=+1} - E_2^{x_1=-1}) = -0,125\mu m$$

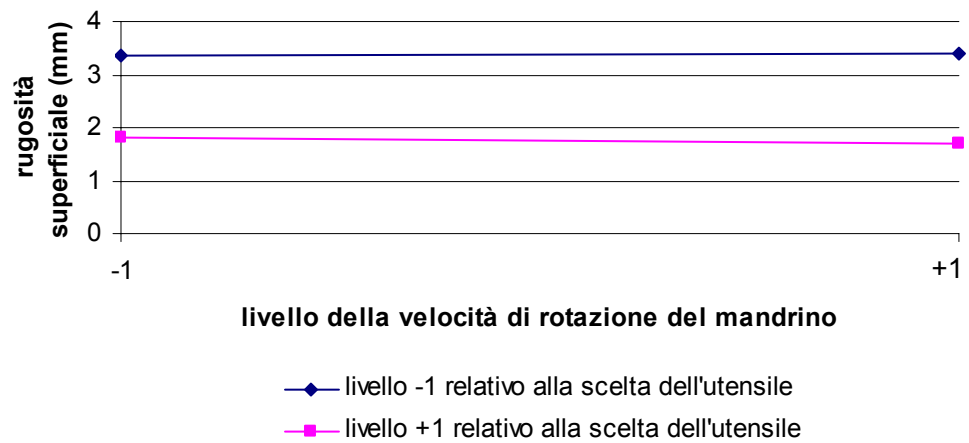
$$E_{13} = \frac{1}{2}(E_1^{x_3=+1} - E_1^{x_3=-1}) = -0,075\mu m$$

$$E_{23} = \frac{1}{2}(E_2^{x_3=+1} - E_2^{x_3=-1}) = -0,925\mu m$$

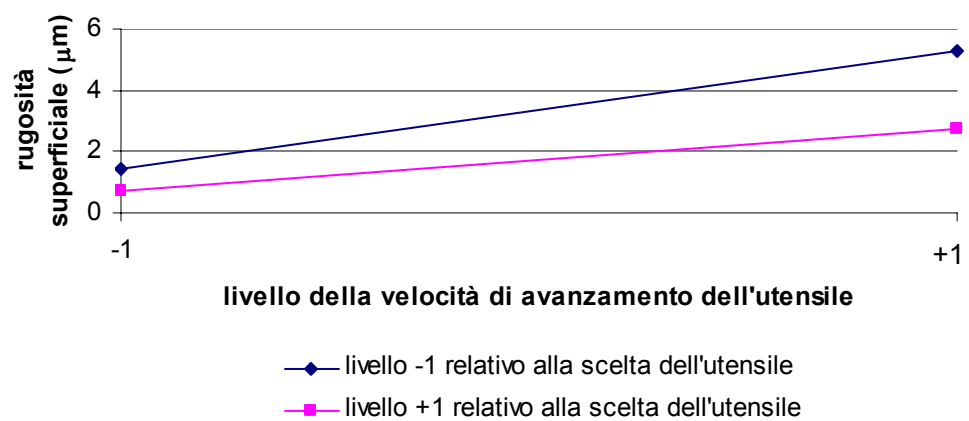
Interazione fra la velocità di rotazione del mandrino e la velocità di avanzamento dell'utensile



Interazione fra la velocità di rotazione del mandrino e la scelta dell'utensile



Interazione fra la velocità di avanzamento dell'utensile e la relativa scelta



L'interazione più evidente è quella fra la velocità di avanzamento dell'utensile e il raggio di raccordo di quest'ultimo. Si nota come viene ridotto l'effetto negativo dell'incremento della velocità di avanzamento sulla finitura superficiale del manufatto adottando l'utensile munito della punta più arrotondata (livello + 1).

L'interazione fra tutti e tre i parametri viene stimata dal confronto dei valori delle interazioni fra due fattori, calcolati in corrispondenza dei due livelli assunti dal terzo parametro.

Si prendano in esame le interazioni fra la velocità di rotazione del mandrino e la scelta dell'utensile, calcolate in corrispondenza di entrambi i livelli della velocità di avanzamento.

Relativamente a $x_2 = -1$, si ottiene:

$$E_1^{x_3=+1, x_2=-1} = y_6 - y_5 = -0,10 \mu m$$

$$E_1^{x_3=-1, x_2=-1} = y_2 - y_1 = 0,30 \mu m$$

$$E_{13}^{x_2=-1} = \frac{1}{2} \left(E_1^{x_3=+1, x_2=-1} - E_1^{x_3=-1, x_2=-1} \right) = -0,20 \mu m$$

Relativamente a $x_2 = +1$:

$$E_1^{x_3=+1, x_2=+1} = y_8 - y_7 = -0,10 \mu m$$

$$E_1^{x_3=-1, x_2=+1} = y_4 - y_3 = -0,20 \mu m$$

$$E_{13}^{x_2=+1} = \frac{1}{2} \left(E_1^{x_3=+1, x_2=+1} - E_1^{x_3=-1, x_2=+1} \right) = 0,05 \mu m$$

La stima dell'interazione fra tutti e tre i parametri è:

$$E_{123} = \frac{1}{2} \left(E_{13}^{x_2=+1} - E_{13}^{x_2=-1} \right) = 0,125 \mu m$$

§ 2.3.2 FORMULAZIONE DEL MODELLO MATEMATICO

Si riportano tutti i valori degli effetti principali e delle interazioni ottenuti:

E_1	- 0,025 μm
E_2	2,925 μm
E_3	- 1,625 μm
E_{12}	- 0,125 μm
E_{13}	- 0,075 μm
E_{23}	- 0,925 μm
E_{123}	0,125 μm

La conoscenza di tali valori rende possibile la formulazione del modello matematico in base al quale, assegnati determinati valori ai parametri, si ottiene la previsione dell'esito di una lavorazione.

Il modello matematico inerente un piano fattoriale 2^3 è il seguente:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3$$

b_0 è il valor medio dei risultati ottenuti nelle otto prove:

$$b_0 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 y_i = 2,5625 \mu\text{m}$$

b_k ($k = 1, 2, 3$) indica la variazione della risposta del sistema al variare di x_k di un'unità (da $x_k = 0$ a $x_k = 1$ o da $x_k = -1$ a $x_k = 0$). Essendo l'effetto principale E_k relativo alla variazione della risposta ottenuta al variare di livello di x_k da -1 a $+1$, ipotizzato il comportamento del sistema lineare, si ha: $E_k = 2b_k$.

La stessa relazione vale fra l'interazione E_{jk} e il coefficiente b_{jk} , essendo quest'ultimo rappresentativo della variazione della risposta del processo ottenuta al variare di un'unità del valore di x_j o x_k : $E_{jk} = 2b_{jk}$.

Analogamente: $E_{123} = 2b_{123}$.

L'espressione del modello matematico è la seguente:

$$y(\mu\text{m}) = 2,5625 - 0,0125x_1 + 1,4625x_2 - 0,8125x_3 - 0,0625 x_1 x_2 + \\ - 0,0375 x_1 x_3 - 0,4625 x_2 x_3 + 0,0625 x_1 x_2 x_3$$

§ 2.3.3 ANALISI STATISTICA DEL MODELLO SPERIMENTALE

I valori degli effetti e delle interazioni dei parametri ritenuti d'interesse, sono stati ottenuti da un piano sperimentale articolato in 2^3 condizioni di prova senza ripetizioni. Si noti quanto alcuni assumano un valore molto piccolo e quindi non significativo. Difficilmente, ripetendo l'esperimento, si otterrebbero gli stessi valori di E_k e E_{jk} . La risposta del sistema è condizionata da altre cause ignote e non controllabili. La casualizzazione dell'ordine di esecuzione delle prove, riduce la probabilità che dei fattori di disturbo inducano condizionamenti sistematici della risposta del sistema.

Ci si deve avvalere di opportuni strumenti di analisi statistica per la verifica della sostanziale correttezza del modello interpretativo del processo ottenuto.

§ 2.3.3.1 LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI GAUSS

Si prenda in esame una popolazione di elementi di caratteristiche omogenee, di natura quantitativa, tale da poterne esprimere il valore ricorrendo ad una variabile continua.

Definiamo la funzione di distribuzione dei valori inerenti gli elementi della popolazione. In ascissa si ha l'insieme dei numeri reali, in ordinata, i valori della funzione. L'area sottesa ad un arco di quest'ultima, delimitata da due rette parallele all'asse delle ordinate, tracciate in corrispondenza degli estremi di un intervallo dell'asse delle ascisse, rappresenta la parte della popolazione che ha valore compreso nell'intervallo (Fig.2.3). L'area sottesa all'intera funzione, il suo integrale da $-\infty$ a $+\infty$, rappresenta quindi la totalità della popolazione.

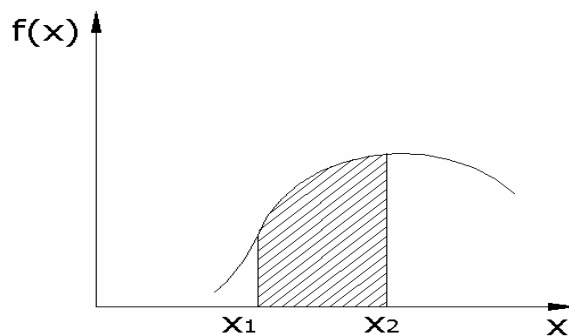


Fig. 2.3 L'area indicata rappresenta la parte della popolazione di valore x , tale che $x_1 \leq x \leq x_2$

In molti casi, la funzione di distribuzione è schematizzabile dal modello matematico di Gauss, visualizzato da una curva continua, simmetrica rispetto un determinato valore, il valor medio μ , e munita di due flessi, ad una determinata distanza da quest'ultimo, definita deviazione standard σ . Oltre i due flessi, la curva di Gauss tende rapidamente a zero (Fig.2.4).

L'espressione analitica della funzione di Gauss è:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

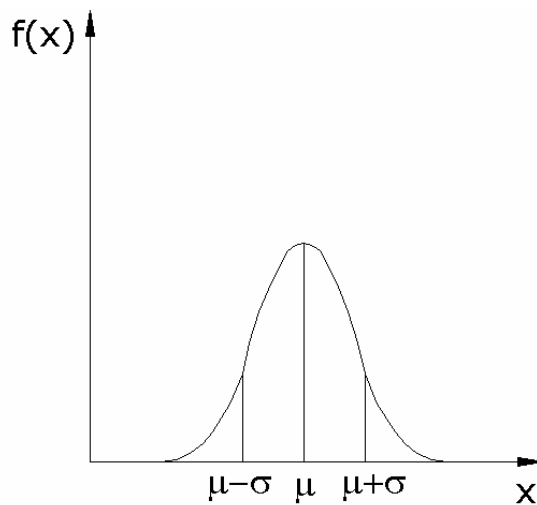


Fig.2.4 Funzione di distribuzione di Gauss

La funzione di distribuzione gaussiana interpreta dati, la cui variabilità è casuale. Se la variabilità della risposta di un sistema è determinata da dei fattori di influenza, la distribuzione dei dati relativi ha un andamento diverso da una gaussiana.

§ 2.3.3.2 IL DIAGRAMMA DELLA PROBABILITÀ CUMULATIVA

La probabilità cumulativa di un elemento, il cui valore è esprimibile da una variabile continua, appartenente ad un campione rappresentativo dell'intera popolazione, indica la porzione della globalità degli elementi che hanno un valore inferiore.

Per tracciare il diagramma della probabilità cumulativa, è necessario:

- riportare in ascissa i valori degli elementi in ordine crescente;
- indicare in ordinata il relativo valore della probabilità cumulativa p_i .

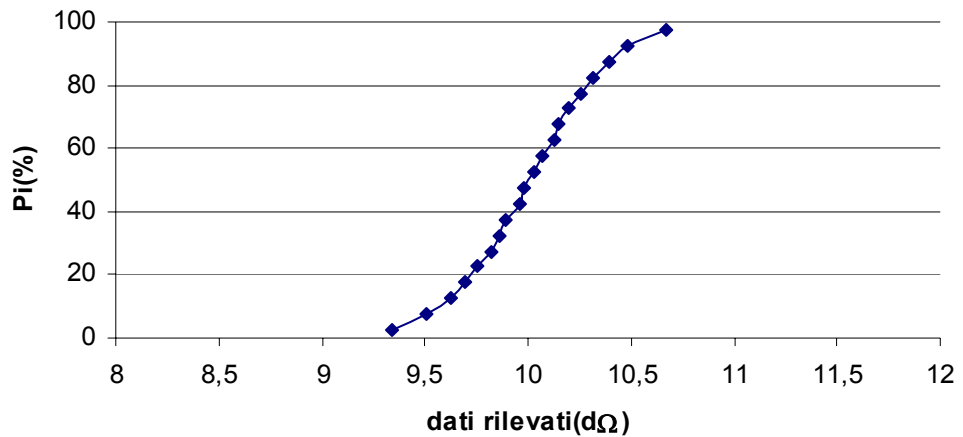
Siano n gli elementi del campione rappresentativo della popolazione, il valore della probabilità cumulativa dell' i -esimo elemento è definito dalla seguente espressione:

$$p_i = \frac{100(i - 0,5)}{n}$$

Prendiamo in considerazione un insieme di 20 dati inerenti un processo di saldatura di un chip sul substrato ceramico. I valori, le resistenze elettriche dei giunti saldati, sono tutti inclusi nell'intervallo (9 dΩ – 11 dΩ):

i	x_i (dΩ)	p_i (%)
1	9,34	2,5
2	9,51	7,5
3	9,63	12,5
4	9,69	17,5
5	9,75	22,5
6	9,82	27,5
7	9,86	32,5
8	9,89	37,5
9	9,96	42,5
10	9,98	47,5
11	10,03	52,5
12	10,07	57,5
13	10,13	62,5
14	10,15	67,5
15	10,20	72,5
16	10,26	77,5
17	10,32	82,5
18	10,39	87,5
19	10,48	92,5
20	10,67	97,5

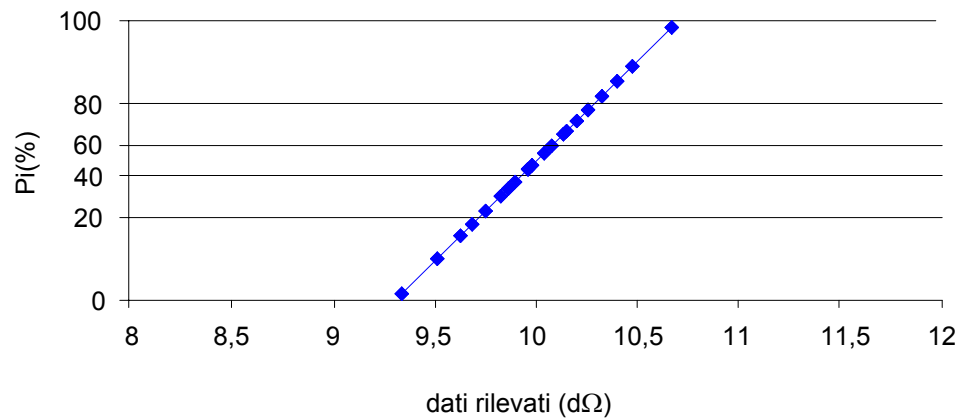
Diagramma della probabilità cumulativa



Il processo di assemblaggio di moduli elettronici segue con buona approssimazione una distribuzione gaussiana.

Si osserva la caratteristica forma ad “S” del diagramma della probabilità cumulativa, tipica di un fenomeno gaussiano. Si modifichi la scala delle ordinate, mantenendo invariata l’ampiezza dell’intervallo (0% - 100%), in modo da rendere rettilineo il diagramma della probabilità cumulativa.

Diagramma della probabilità cumulativa

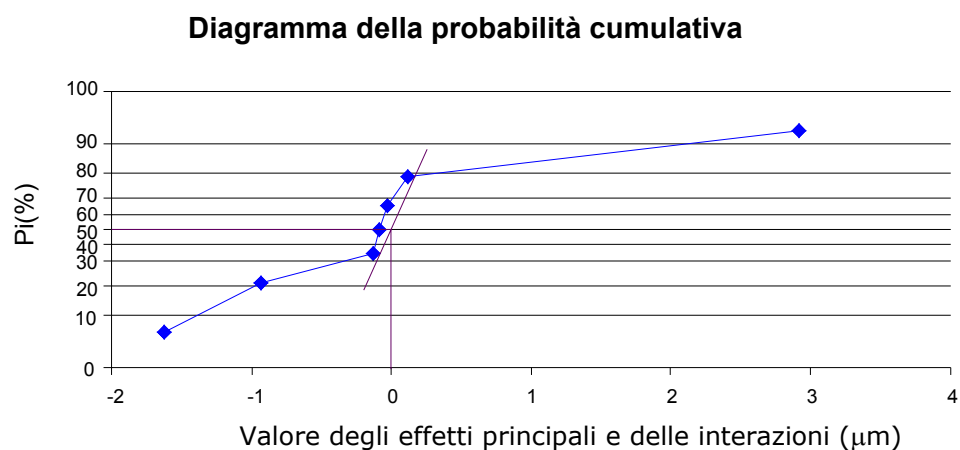


La scala non lineare ottenuta, su cui tracciare il diagramma della probabilità cumulativa è un valido strumento per giudicare l’aleatorietà di un processo.

- IMPIEGO DEL DIAGRAMMA DELLA
PROBABILITÀ CUMULATIVA PER
VALUTARE LA SIGNIFICATIVITÀ DEGLI
EFFETTI PRINCIPALI E DELLE
INTERAZIONI DEI PARAMETRI DEL
PROCESSO IN ESAME

Si ordinino in ordine crescente i valori degli effetti principali e delle interazioni ottenuti, calcolandone i valori di probabilità cumulativa, e tracciandone il diagramma adottando la scala delle ordinate non lineare:

i		Valore (μm)	$p_i(\%)$
1	E_3	-1,625	7,14
2	E_{23}	-0,925	21,43
3	E_{12}	-0,125	35,71
4	E_{13}	-0,075	50,00
5	E_1	-0,025	64,29
6	E_{123}	0,125	78,57
7	E_2	2,925	92,86



dall'esame del diagramma, si osserva che i valori della probabilità cumulativa dell'effetto principale E_1 e delle interazioni E_{12} , E_{13} , ed E_{123} , sono interpolabili con buona approssimazione da una retta passante per il punto ($0\mu\text{m}$, 50%).

Si deduce che i valori di E_1 , E_{12} , E_{13} , ed E_{123} , appartengono ad una distribuzione gaussiana di valor medio nullo: hanno carattere di aleatorietà e non sono significativi ai fini dell'elaborazione del modello interpretativo del processo.

§ 2.3.3.3 DETERMINAZIONE DELL'INCERTEZZA DEL REALE VALORE DEGLI EFFETTI PRINCIPALI E DELLE INTERAZIONI DEI PARAMETRI DEL PROCESSO

Qualora ripetessimo il piano sperimentale fattoriale n volte, otterremmo per ciascun E_k , E_{ik} ed E_{123} , n valori diversi appartenenti a (2^3-1) distribuzioni gaussiane. Ciascuna di queste ultime ha, come valor medio, il valor vero dell'effetto o dell'interazione (se $n \rightarrow \infty$).

L'esperienza di molti decenni nel campo della conduzione e analisi statistica dei piani sperimentali fattoriali con ripetizioni, suffraga la ragionevolezza dell'ipotesi di ritenere costante la varianza (quadrato della deviazione standard σ) delle (2^3-1) distribuzioni gaussiane.

In precedenza si è constatata la sostanziale appartenenza di ben quattro elementi ad un'unica distribuzione normale. Pertanto si può ottenere una stima grossolana della comune varianza:

$$S_{E_k}^2 = \frac{E_1^2 + E_{12}^2 + E_{13}^2 + E_{123}^2}{4} =$$

$$= \frac{(-0,025\mu m)^2 + (-0,125\mu m)^2 + (-0,075\mu m)^2 + (0,125\mu m)^2}{4} = 0,009\mu m^2$$

Si determini di quanto si discostano dalle stime calcolate, i valori veri dei tre elementi significativi del processo, ossia i valori medi delle tre gaussiane (per $n \rightarrow \infty$), μ_{E_2} , μ_{E_3} , $\mu_{E_{23}}$.

Si operi una trasformazione della variabile di ciascuna distribuzione gaussiana, ottenendone la forma normalizzata, caratterizzata da valor medio nullo e

varianza unitaria: $Z = \frac{E_k - \mu_{E_k}}{\sigma_{E_k}}$.

Avendo solo una stima della comune varianza, S_E , si deve far riferimento al modello statistico di Student, la distribuzione t , che fornisce una stima della distribuzione gaussiana normalizzata. La distribuzione è definita in base al numero

dei gradi di libertà $v = n - 1$ (essendo n i valori impiegati per la stima della varianza).

La variabile è:
$$t = \frac{E_k - \mu_{E_k}}{S_{E_k}}$$

Sono disponibili in letteratura i valori della variabile t inerenti determinati valori della probabilità α , per diversi v .

α è la porzione degli elementi della popolazione con valori esterni all'intervallo $[0, t(\alpha)]$.

Ritenuto accettabile il valore di probabilità $\alpha = 5\%$, si ottiene per $v = 3$, $t(\alpha) = 2,353$.

L'ampiezza dell'intervallo di confidenza, entro cui il vero valore di E_k ($k = 2, 3, 23$) non è incluso con la probabilità del 5%, risulta:

$$2t(\alpha)S_{E_k} = 2 \cdot 2,353 \cdot 0,097 \mu m = 0,46 \mu m$$

Per i tre elementi significativi, si ottengono i seguenti intervalli di confidenza:

$$E_2: [2,925 \mu m - 0,23 \mu m, 2,925 \mu m + 0,23 \mu m]$$

$$E_3: [-1,625 \mu m - 0,23 \mu m, -1,625 \mu m + 0,23 \mu m]$$

$$E_{23}: [-0,925 \mu m - 0,23 \mu m, -0,925 \mu m + 0,23 \mu m]$$

§ 2.3.3.4 ANALISI DEI RESIDUI

In base a quanto scritto, l'espressione del modello matematico è la seguente:

$$y = b_0 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{23} x_2 x_3$$

$$y(\mu m) = 2,5625 + 1,4625 x_2 - 0,8125 x_3 - 0,4625 x_2 x_3$$

Si confrontino i valori effettivamente ottenuti nelle otto prove condotte e quelli previsti dal modello analitico:

test				valori rilevati	valori previsti	residui $e_i = y_i - y_i^*$	ordine di esecuzione
n	x_1	x_2	x_3	$y_i(\mu\text{m})$	$y_i^*(\mu\text{m})$	$e_i(\mu\text{m})$	n
1	-1	-1	-1	1,3	1,45	- 0,15	4
2	+1	-1	-1	1,6	1,45	0,15	2
3	-1	+1	-1	5,4	5,3	0,10	8
4	+1	+1	-1	5,2	5,3	-0,10	5
5	-1	-1	+1	0,8	0,75	0,05	3
6	+1	-1	+1	0,7	0,75	-0,05	7
7	-1	+1	+1	2,8	2,75	0,05	1
8	+1	+1	+1	2,7	2,75	-0,05	6

L'analisi dei residui $e_i = y_i - y_i^*$ è determinante ai fini del giudizio di adeguatezza del modello e conseguentemente del piano sperimentale adottato, da cui deriva.

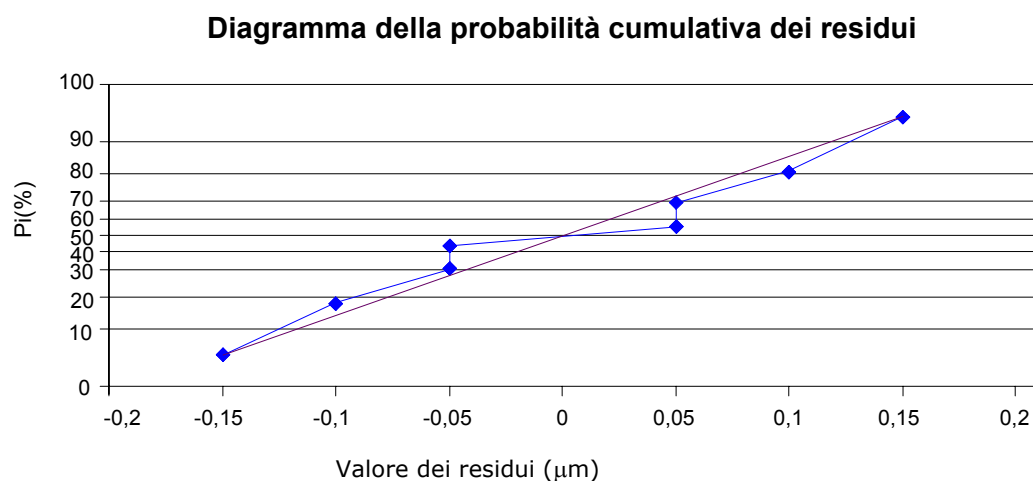
I residui devono essere di natura casuale, caratterizzati da:

- appartenenza ad una distribuzione gaussiana di valor medio nullo;
- indipendenza dal valore della risposta prevista y_i^* ;
- assenza di correlazione con i parametri x_i ;
- assenza di correlazione con l'ordine di esecuzione delle prove.

- IMPIEGO DEL DIAGRAMMA DELLA
PROBABILITÀ CUMULATIVA PER
VERIFICARE L'APPARTENENZA DEI
RESIDUI AD UNA DISTRIBUZIONE
GAUSSIANA DI VALOR MEDIO NULLO

Si tracci il diagramma della probabilità cumulativa dei residui, impiegando, per l'asse delle ordinate, la già introdotta scala non lineare.

N	Valore dei residui (μm)	Probabilità cumulativa $p_i = \frac{100(i - 0,5)}{8}$
1	-0,15	6,25
2	-0,10	18,75
3	-0,05	31,25
4	-0,05	43,75
5	0,05	56,25
6	0,05	68,75
7	0,10	81,25
8	0,15	93,75

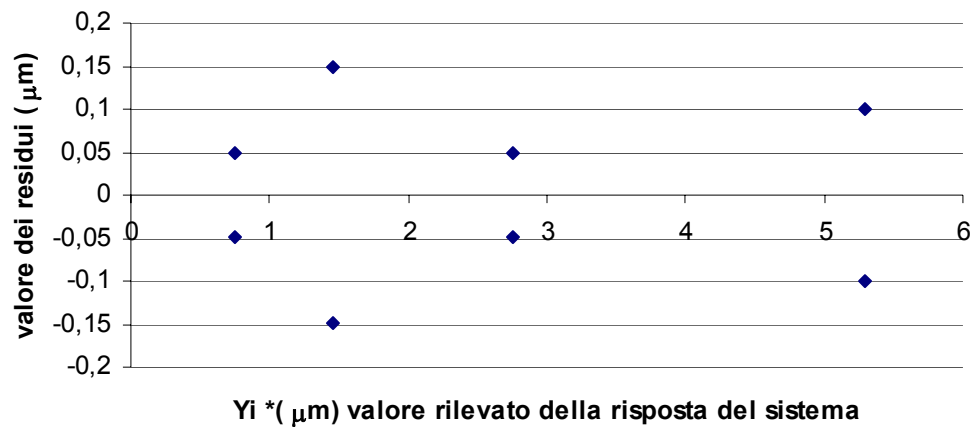


Con buona approssimazione, i dati sono interpolabili da una retta passante per il punto (0 μm , 50%): è dimostrata l'appartenenza dei residui alla distribuzione gaussiana di valor medio nullo.

- INDIPENDENZA DAL VALORE DELLA
RISPOSTA PREVISTA DAL MODELLO y_i^*

Si rappresenti l'andamento dei residui in funzione dei valori calcolati dal modello analitico.

Andamento dei residui al variare del valore della risposta del modello



È evidente l'andamento aleatorio dei valori residui rispetto al valore del modello y_i^* .

Qualora i punti rappresentativi dei residui fossero disposti in maniera netta al di sopra o al di sotto del valore nullo, sarebbe stato un segno evidente dell'errato valore del termine noto del modello: b_0 .

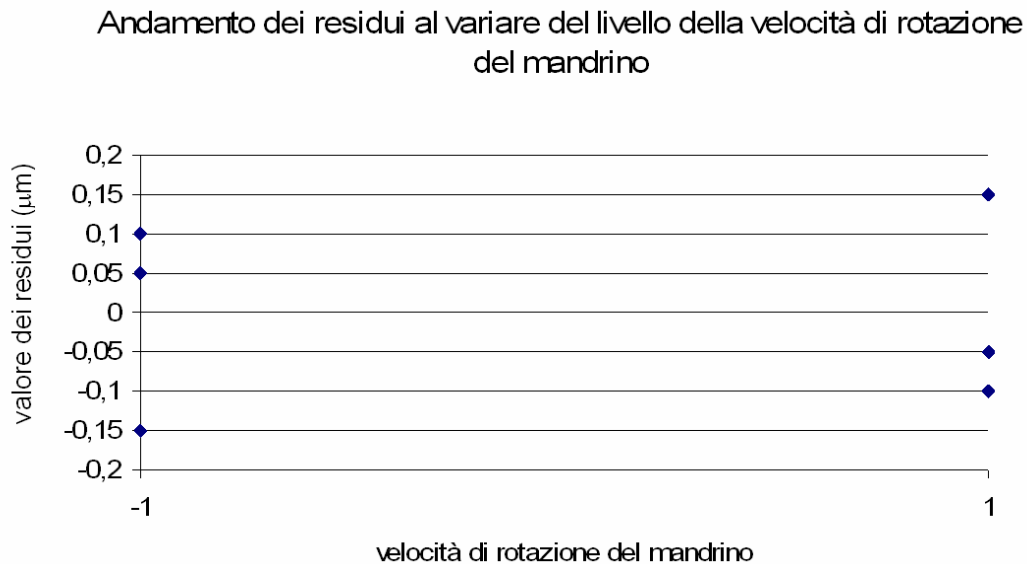
Qualora si fosse presentato un netto andamento crescente o decrescente dei residui al crescere del valore previsto del modello, sarebbe stato un chiaro indice dell'influenza sul processo di un parametro non preso in esame.

Qualora i punti rappresentativi dei residui avessero un andamento parabolico o periodico, sarebbe stata chiara indicazione della necessità dell'introduzione di termini di ordine più elevato nel modello. Aniché un piano sperimentale fattoriale 2^3 , sarebbe necessario porre in essere un 3^3 , nel quale vengono presi in esame tre livelli per ogni fattore.

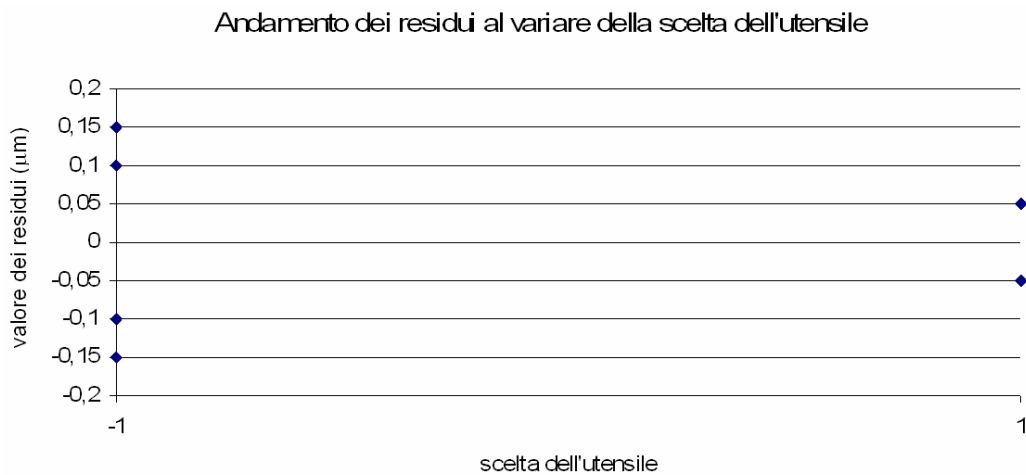
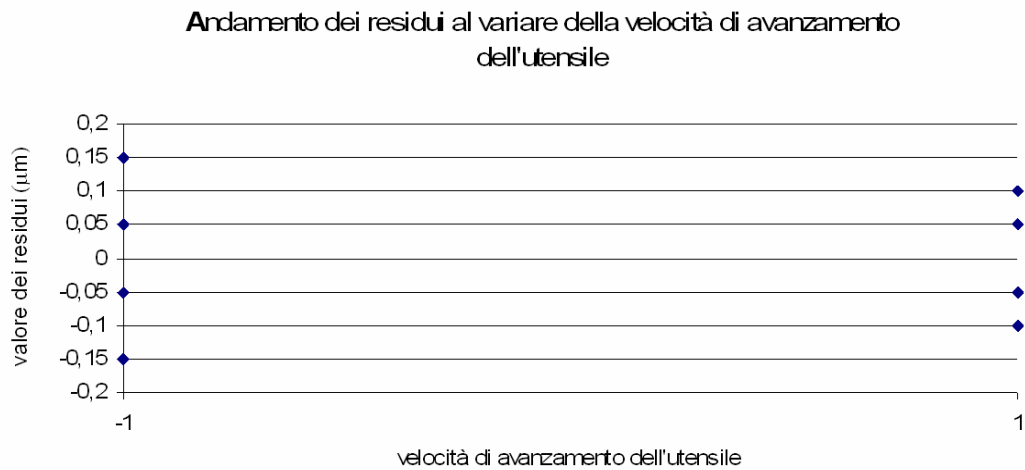
- ASSENZA DI CORRELAZIONE CON I PARAMETRI x_i

Osserviamo che la disposizione dei residui al variare del livello della velocità di rotazione del mandrino è casuale. Se si fosse ottenuta una disposizione marcatamente asimmetrica con punti tutti al di sopra della retta $e_i = 0$ per $x_1 = -1$ e

tutti al di sotto per $x_1 = +1$, o viceversa, si avrebbe avuto indicazione della necessità di tener conto, ai fini dell'elaborazione del modello, dell'effetto principale o di un'interazione associata al fattore.

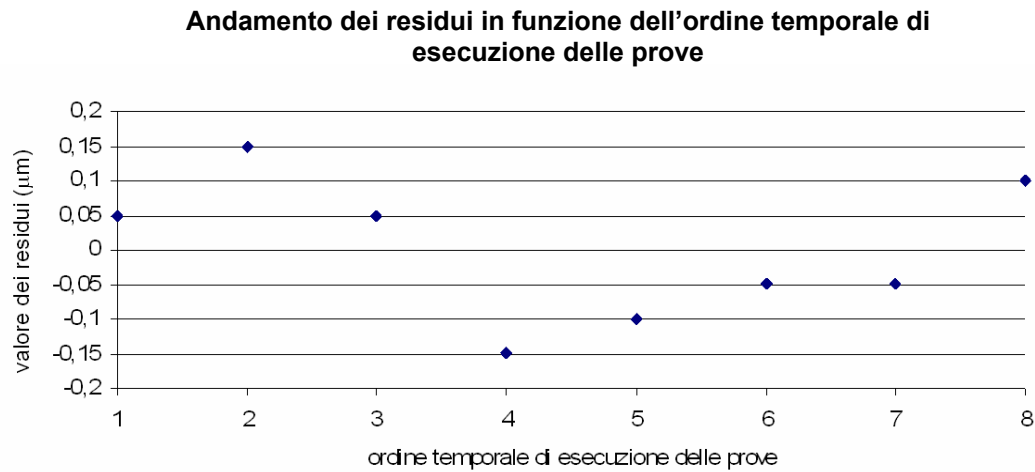


Per quanto riguarda la velocità di avanzamento (x_2) e la scelta dell'utensile (x_3), effetti presi in considerazione nell'espressione analitica interpretativa del comportamento del sistema, si osservano delle deboli contrazioni della variabilità dei residui passando da -1 a +1. È l'indicazione dell'effetto di dispersione dovuto ai due parametri. Se tale variabilità fosse più marcata, avremmo indicazione della necessità di ripetere l'esperimento più volte ai fini dell'ottenimento di stime più attendibili dei coefficienti del modello: b_2 , b_3 , b_{23} .



- INDIPENDENZA DALL'ORDINE DI
ESECUZIONE DELLE PROVE

L'andamento dei residui in funzione dell'ordine di esecuzione delle prove è casuale. Se fosse stato crescente o decrescente, qualora l'esperimento avesse avuto una maggiore estensione temporale, avrebbe messo in evidenza il crescente effetto nel tempo di fattori non presi in esame. Un andamento ciclico sarebbe stato determinato dall'influenza di un fattore variabile periodicamente.



Dall'analisi dei residui, si traggono sufficienti indicazioni riguardo l'adeguatezza del modello, espressione di validi risultati ottenuti nell'esperimento.

§ 2.3.4 IMPIEGO DEL MODELLO INTERPRETATIVO DEL SISTEMA: OTTIMIZZAZIONE

Dal piano fattoriale 2^3 si è ottenuto il seguente modello matematico:

$$y = b_0 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{23} x_2 x_3$$

$$y(\mu\text{m}) = 2,5625 + 1,4625x_2 - 0,8125x_3 - 0,4625 x_2 x_3$$

La risposta del sistema, la finitura superficiale del componente dell'assale dell'erpice a dischi, dipende dai seguenti parametri:

x_2 : velocità di avanzamento dell'utensile;

x_3 : scelta del raggio di raccordo fra i tagliente dell'utensile da tornio.

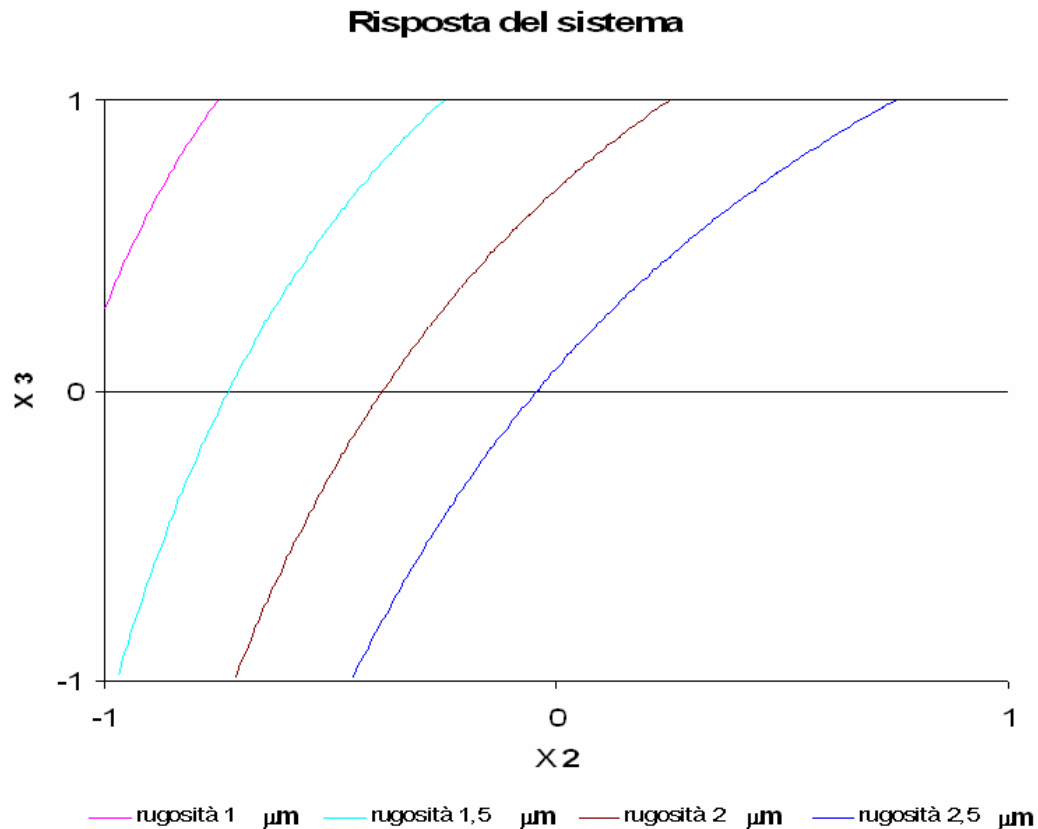
Si riportano i campi di variazione dei tre fattori:

		livello - 1	livello + 1
x_1	velocità di rotazione del mandrino	2400 rpm	2600 rpm
x_2	velocità di avanzamento dell'utensile	0,13 mm/giro	0,26 mm/giro
x_3	raggio di raccordo della punta dell'utensile	0,4 mm	0,8 mm

Mentre x_2 è una grandezza quantitativa, essendo descrivibile da una variabile continua, x_3 è una grandezza quantitativa, dipendente dalla scelta dell'utensile, del quale è disponibile in commercio un assortimento limitato di raggi di raccordo fra i taglienti.

Si ignori ciò e si considerino continue entrambi le variabili.

Si rappresenti nel piano cartesiano di assi x_2 ed x_3 , i luoghi di punti caratterizzati da valori costanti della rugosità.



Si consideri la curva di risposta inerente il valore massimo consentito della rugosità: 2,5 μm .

Potendo x_3 assumere solo i valori: -1 ed 1, si hanno due possibili scelte della velocità di avanzamento dell'utensile, rappresentate dalle intersezioni della curva relativa a 2,5 μm con le rette $x_3 = -1$ e $x_3 = +1$.

Per ragioni di produttività, si sceglie il punto relativo alla maggiore velocità di avanzamento: $x_2 = 0,75$, corrispondente a:

$$0,75(0,26 \text{ mm/giro} - 0,13 \text{ mm/giro})/2 + (0,26 \text{ mm/giro} + 0,13 \text{ mm/giro})/2 = 0,244 \text{ mm/giro}.$$

Il risultato ottenuto matematicamente deve essere accettato con cautela, considerata l'incertezza dei veri valori dei coefficienti dell'espressione analitica del modello interpretativo del processo.

Per quanto riguarda la velocità di rotazione del mandrino, considerata la sostanziale ininfluenza ai fini della rugosità del manufatto, si può scegliere l'estremo inferiore dell'intervallo di variazione preso in esame:

[2400 rpm , 2600 rpm] minimizzando la potenza assorbita per l'esecuzione della tornitura.

Si riassumono i valori ottimali dei parametri del processo, comparati con i valori inizialmente adottati:

		valori ottimizzati	valori iniziali
x_1	velocità di rotazione del mandrino	2400 rpm	2500 rpm
x_2	velocità di avanzamento dell'utensile	0,24 mm/giro	0,20 mm/giro
x_3	raggio di raccordo della punta dell'utensile	0,8 mm	0,4 mm

§ 2.4 ANALISI DELLA VARIANZA (ANOVA)

L'analisi della varianza è un metodo statistico, finalizzato alla determinazione delle cause di variazione della risposta di un sistema. Nei piani sperimentali fattoriali caratterizzati da ripetizioni, l'ANOVA determina gli effetti dei parametri e le loro interazioni condizionanti realmente il sistema.

§ 2.4.1 ESEMPIO DI APPLICAZIONE DELL'ANOVA NELLA VALIDAZIONE DI UN PIANO SPERIMENTALE FATTORIALE CON RIPETIZIONI.

Si prenda in esame un piano sperimentale fattoriale replicato relativo ad un processo di brasatura. In particolare si esamina l'influenza sulla resistenza a trazione del giunto dei seguenti parametri:

- la temperatura;
- rapidità di deposizione del metallo d'apporto.

Si considerano 2 livelli per i due fattori e si esegue l'esperimento tre volte, ottenendo:

		livello -1	livello +1
x_1	temperatura	150 ° C	260 ° C
x_2	rapidità di deposizione del metallo d'apporto	254 mm/min	508 mm/min.

test	x_1	x_2	y^1 (MPa)	y^2 (MPa)	y^3 (MPa)	y^- (MPa)	S^2 (MPa) ²
1	-1	-1	21,27	18,76	24,70	21,58	8,89
2	+1	-1	5,50	8,28	7,43	7,07	2,03
3	-1	+1	5,60	7,74	7,58	6,97	1,42
4	+1	+1	19,33	20,29	22,98	20,87	3,58

Si calcoli il valor medio dei 12 dati rilevati:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_i^j}{nm} = \frac{\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 y_i^j}{12} = 14,12 \text{ MPa}$$

Si calcoli la somma totale dei quadrati dei dati:

$$SS(\text{totale}) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 (y_i^j)^2 = 3030,6 \text{ MPa}$$

Il valore ottenuto rappresenta la variazione complessiva dei dati, in quanto è tanto maggiore quanto rilevante è l'eterogeneità dei dati. Si decomponga l' $SS(\text{totale})$ in tre termini:

- il primo corrispondente alla media;
- il secondo inerente la variazione dovuta alle diverse condizioni sperimentali;
- il terzo relativo alla variabilità dei dati osservata nelle ripetizioni delle prove.

Per il generico dato rilevato nella j -esima ripetizione della i -esima prova si ha:

$$y_i^j = \bar{y} + (\bar{y}_i - \bar{y}) + (y_i^j - \bar{y}_i)$$

Si ottiene:

$$SS(\text{totale}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_i^j)^2 = nm \bar{y}^2 + n \sum_{i=1}^m (\bar{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_i^j - \bar{y}_i)^2$$

Si calcolino i valori dei tre termini:

$$SS(\text{media}) = 12 \times \bar{y}^2 = 2393,0 \text{ MPa}^2$$

$$SS(\text{diverse condizioni sperimentali}) = 605,7 \text{ MPa}^2$$

$$SS(\text{errore sperimentale}) = 31,9 \text{ MPa}^2$$

Si osserva che il contributo maggiore all' $SS(\text{totale})$ è quello relativo alla media, mentre quello dell'errore sperimentale, apprezzato mediante la ripetizione di ogni condizione di prova è il più contenuto.

Si omette la dimostrazione che il vero valore della varianza della risposta del sistema non dipende dalla condizione sperimentale.

In base a tale ipotesi si può ottenere, come stima attendibile di σ^2 , la media dei valori della varianza (s^2) calcolati in ognuna delle quattro diverse combinazioni dei livelli dei parametri:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{(y_i^j - \bar{y}_i)^2}{(n-1)m} = 3,98 \text{ MPa}^2$$

Si osserva che il valore indicativo della varianza può essere ottenuto dividendo l'SS(errore sperimentale) per $m(n-1) = 4(3-1)$.

Quest'ultimo rappresenta il grado di libertà relativo al numero di prove necessarie per la determinazione della stima della varianza, e il rapporto si definisce: MS(errore sperimentale) (media dei quadrati inerente l'errore sperimentale).

Si ipotizzi che il vero valore della risposta del sistema non dipenda dalla condizione di prova: i parametri presi in esame non abbiano influenza sull'esito dell'operazione di brasatura.

L'espressione del valore della varianza può allora essere espresso:

$$\frac{n \sum_{i=1}^m (\bar{y}_i - \bar{y})^2}{m-1} = 201,90 \text{ MPa}^2$$

Si riconosca che il numeratore della frazione non è altro che l'SS (diverse condizioni sperimentali). Il denominatore $m-1 = 3$, è il grado di libertà relativo al numero dei dati sul quale si basa il calcolo della stima della varianza. Il rapporto si definisce: MS(diverse condizioni sperimentali) (media dei quadrati dovuta alle diverse condizioni di prova).

Per valutare la validità dell'ipotesi si fa riferimento alla funzione di distribuzione statistica F, definita da due parametri: v_1 e v_2 .

Si considerino le varianze s_1^2 ed s_2^2 di due campioni indipendenti di numerosità n_1 ed n_2 estratti da due popolazioni distribuite normalmente, caratterizzate da una stessa varianza, il rapporto $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ appartiene alla distribuzione F di parametri: $v_1 = n_1 - 1$ ed $v_2 = n_2 - 1$. Sono disponibili delle tabelle, classificate in base al livello di significatività α , in cui sono riportati i valori critici $F_{v_1, v_2, 1-\alpha}$.

Essendo $v_1 = m - 1 = 3$, il grado di libertà inerente le diverse condizioni di prova ed $v_2 = m(n - 1) = 8$, il grado di libertà relativo all'errore sperimentale, ritenuto accettabile un livello di significatività dell'1%, il corrispondente valore critico $F_{3,8,99\%}$ risulta 7,59.

Qualora le due stime della varianza siano compatibili, il rapporto

$$F_{calc} = \frac{MS(\text{diverse condizioni di prova})}{MS(\text{errore sperimentale})} = \frac{201,90 \text{ MPa}^2}{3,98 \text{ MPa}^2} = 50,7$$

non dovrebbe essere maggiore del valore critico. Si ha pertanto il 99% di confidenza che l'ipotesi non è valida: i parametri considerati influenzano realmente la resistenza del giunto.

Si riepilogano le grandezze introdotte nella tabella dell'ANOVA:

causa di variazione	somma dei quadrati (MPa ²)	gradi di libertà	media dei quadrati (MPa ²)	F _{calc}
media	2393,0	1	2393,0	601,3
diverse condizioni sperimentali	605,7	3	201,90	50,7
errore sperimentale	31,9	8	3,98	
totale	3030,6	12		

Si osservi che:

- la somma dei gradi di libertà uguaglia il numero complessivo dei dati rilevati;
- dividendo il valore di ogni somma dei quadrati per il relativo grado di libertà, si ottiene il relativo valore della media dei quadrati;
- nell'ultima colonna si ha il rapporto ottenuto dividendo per il valore della media dei quadrati inerente l'errore sperimentale (indicativo della comune varianza) la rispettiva media dei quadrati.

Il piano fattoriale 2^2 deriva dall'aver ipotizzato che la risposta del sistema dipenda soltanto da due fattori e che siano trascurabili effetti non lineari dei parametri. Il modello analitico assunto è: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2$.

Dai valori medi dati rilevati nelle distinte condizioni sperimentali, si possono ottenere i valori degli effetti e dell'interazione:

test	x_1	x_2	$\bar{y}$ (MPa)
1	-1	-1	21,58
2	+1	-1	7,07
3	-1	+1	6,97
4	+1	+1	20,87

$$E_1 = \frac{1}{2}[(7,07 + 20,87) - (21,58 + 6,97)]MPa = -0,305MPa$$

$$E_2 = \frac{1}{2}[(6,97 + 20,87) - (21,58 + 7,07)]MPa = -0,405MPa$$

$$E_{12} = \frac{1}{2}[(20,87 - 6,97) - (7,07 - 21,58)]MPa = 14,205MPa$$

I coefficienti risultano pertanto:

$$b_0 = \bar{y} = 14,12MPa \quad b_1 = \frac{E_1}{2} = -0,15MPa \quad b_2 = \frac{E_2}{2} = -0,20MPa \quad b_{12} = \frac{E_{12}}{2} = 7,10MPa$$

l'espressione del modello è: $y^* (MPa) = 14,12 - 0,15x_1 - 0,20x_2 + 7,10x_1x_2$

Si confrontino i valori medi rilevati nelle diverse condizioni di prova con i valori previsti dal modello:

test	x ₁	x ₂	y ⁻ (MPa)	y* (MPa)
1	-1	-1	21,58	21,57
2	+1	-1	7,07	7,07
3	-1	+1	6,97	6,97
4	+1	+1	20,87	20,87

Si calcoli la somma dei quadrati dei dati, sostituendo ai valori rilevati in corrispondenza delle diverse condizioni sperimentali e nelle diverse ripetizioni dell'esperimento, i valori calcolati mediante il modello:

$$\begin{aligned}
 SS(\text{modello}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_i^*)^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_o^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_1^2 x_{1i}^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_2^2 x_{2i}^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{12}^2 x_{1i}^2 x_{2i}^2 = \\
 &= n \left(\sum_{i=1}^m b_o^2 + \sum_{i=1}^m b_1^2 x_{1i}^2 + \sum_{i=1}^m b_2^2 x_{2i}^2 + \sum_{i=1}^m b_{12}^2 x_{1i}^2 x_{2i}^2 \right) = \\
 &= nm(\text{media})^2 + nm \frac{E_1^2}{4} + nm \frac{E_2^2}{4} + nm \frac{E_{12}^2}{4} = 2999,5 \text{ MPa}^2
 \end{aligned}$$

L'espressione ottenuta pone in evidenza l'influenza dei parametri sulla variazione complessiva dei dati. Si riproponga la tabella dell'ANOVA nella seguente forma:

causa di variazione	somma dei quadrati (MPa ²)	gradi di libertà	media dei quadrati (MPa ²)	F _{calc}
media	2393,0	1	2393,0	601
E ₁	0,3	1	0,3	0,08
E ₂	0,5	1	0,5	0,13
E ₁₂	605,3	1	605,3	152
residui	31,5	8	3,9	
totale	3030,6	12		

Nell'ultima colonna sono riportati i rapporti delle medie dei quadrati con il valore MS(errore sperimentale) ($3,98 \text{ MPa}^2$), indicativo della comune varianza, esplicitamente riportato nella precedente versione della tabella dell'ANOVA.

Ai fini della determinazione degli effetti significativi, si confrontano i valori calcolati nell'ultima colonna con il valore critico della distribuzione F relativo al livello di significatività del 10%: $F_{1,8,90\%} = 3,46$

Gli effetti per i quali risulta: $F_{calc} < F_{critico}$ sono trascurabili.

L'espressione del modello risulta pertanto: $y = b_0 + b_{12}x_1x_2$

La somma dei quadrati inerente il modello risulta:
 $SS(\text{modello}) = SS(\text{media}) + SS(E_{12})$

Si riporta un'ulteriore versione della tabella dell'ANOVA:

causa di variazione	somma dei quadrati (MPa^2)	gradi di libertà	media dei quadrati (MPa^2)	F_{calc}
media	2393,0	1	2393,3	601
E_{12}	605,3	1	605,3	152
errore sperimentale	31,9	8	3,98	1
carenza del modello	0,4	2	0,2	0,05
totale	3030,6	12		

Il giudizio di validità del modello è dato dal confronto fra il valore ottenuto nell'ultima colonna $F_{calc}(\text{carenza del modello}) = 0,05$ con il valore critico

$$F_{2,8,75\%} = 1,66.$$

Essendo $F_{calc}(\text{carenza del modello}) < F_{2,8,75\%}$, il modello per un livello di confidenza del 25% non presenta carenze.

Un altro strumento utile per dare una misura complessiva della validità del modello è il coefficiente di determinazione: $R^2 = \frac{SS(\text{modello}) - SS(\text{media})}{SS(\text{totale}) - SS(\text{media})}$

$$\text{Nel caso esaminato, si ottiene: } R^2 = \frac{2998,3 - 2393,0}{3030,6 - 2393,0} = 94,9\%$$

Il risultato ottenuto indica che l'interazione fra i due parametri presi in esame determina per il 94,9% la variabilità degli esiti della lavorazione.

È un'ulteriore conforme della validità del modello.

§ 2.5 PIANI SPERIMENTALI FATTORIALI FRAZIONATI

Qualora sia necessario prendere in esame un numero rilevante di parametri, il piano sperimentale fattoriale prevede un numero proibitivo di esperimenti. Basti pensare che a soli sette fattori ritenuti influenti sulla risposta del sistema, corrispondono ben $2^7 = 128$ condizioni di prova, e qualora l'analisi dei residui ponga in evidenza la necessità di considerare effetti non lineari delle grandezze di influenza, dovrebbero essere successivamente prese in esame ben 3^7 (2187) combinazioni dei livelli dei parametri.

Nei due esempi trattati precedentemente si è constatato che gran parte degli effetti e delle interazioni fra i parametri assumono entità trascurabile. Inoltre è un dato suffragato dall'esperienza che generalmente le interazioni fra un numero $n \geq 3$ di fattori sono trascurabili.

Tali considerazioni fanno emergere la possibilità di condurre piani fattoriali con rilevante numero di parametri esaminando un numero ragionevole di condizioni sperimentali.

§ 2.5.1 APPLICAZIONE DI UN PIANO SPERIMENTALE FATTORIALE FRAZIONATO

Si prenda in esame un piano sperimentale finalizzato alla determinazione degli effetti di cinque parametri sull'assorbimento di potenza elettrica richiesto per un'operazione di saldatura. Si rappresentino i fattori e i relativi livelli:

fattori	descrizione	livello - 1	livello + 1
x_1	voltage del circuito aperto	31 V	34 V
x_2	inclinazione dell'elettrodo	6°	11°
x_3	rapidità di fusione dell'elettrodo	58mm/s	68mm/s
x_4	diametro dell'elettrodo	0,9 mm	1,2 mm
x_5	estensione dell'elettrodo	9,5 mm	16,0 mm

Si introduca il metodo generalizzato per il calcolo degli effetti e delle interazioni, indipendente dal numero delle variabili. Si considera un generico piano fattoriale 2^4 . Le sedici prove da condurre si ottengono dalla combinazione dei livelli dei quattro parametri:

N°	x_1	x_2	x_3	x_4	y_i	I	E_1	E_2	E_3	E_4	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{23}	E_{24}	E_{34}	E_{123}	E_{124}	E_{234}	E_{1234}
1	-1	-1	-1	-1	y_1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1
2	+1	-1	-1	-1	y_2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1	-1	y_3	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1
4	+1	+1	-1	-1	y_4	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1
5	-1	-1	+1	-1	y_5	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1
6	+1	-1	+1	-1	y_6	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1
7	-1	+1	+1	-1	y_7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+1
8	+1	+1	+1	-1	y_8	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1
9	-1	-1	-1	+1	y_9	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1
10	+1	-1	-1	+1	y_{10}	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1
11	-1	+1	-1	+1	y_{11}	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1
12	+1	+1	-1	+1	y_{12}	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1
13	-1	-1	+1	+1	y_{13}	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1
14	+1	-1	+1	+1	y_{14}	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	-1
15	-1	+1	+1	+1	y_{15}	+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
16	+1	+1	+1	+1	y_{16}	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Il valore dell'effetto E_k , o dell'interazione E_{kj} o E_{kjr} , è esprimibile nella seguente maniera: $\frac{2}{N}(\pm y_1 \pm y_2 \pm \dots \pm y_N)$ (N è il numero totale delle prove). La scelta del segno in corrispondenza dell'i-esimo termine, dipende dal segno presente nella i-esima riga della colonna relativa al fattore del quale si calcola l'effetto, o dal prodotto dei segni riportati nella i-esima riga delle colonne inerenti i parametri dei quali si calcola l'interazione.

Essendo le interazioni fra un numero $n \geq 3$ di fattori generalmente trascurabili, si può impiegare la colonna inerente l'interazione E_{1234} per il calcolo dell'effetto E_5 , relativo al quinto parametro. Il valore che in tal modo si ottiene, in base ai segni riportati nell'ultima colonna, è la somma dell'effetto del quinto fattore e dell'interazione E_{1234} .

Il piano fattoriale frazionato ottenuto è definito dalla relazione: $1234 = 5$.

1234 rappresenta la colonna della tabella relativa al calcolo dell'interazione E_{1234} .

Se una colonna viene moltiplicata per se stessa, si ottiene la colonna I, caratterizzata da tutti i segni positivi, impiegata per il calcolo della risposta media del sistema. Un'ulteriore definizione del piano fattoriale frazionato 2^{5-1} è la seguente: $5 \cdot 5 = 5 \cdot 1234 \rightarrow I = 12345$.

Per determinare quali siano gli effetti e le interazioni che si confondono, si moltiplichino i membri della relazione di definizione del piano 2^{5-1} con le colonne rappresentative degli effetti e delle interazioni del piano 2^4 di origine:

$1 \cdot I = 1 \cdot 12345$	$1 = 2345$
$2 \cdot I = 2 \cdot 12345$	$2 = 1345$
$3 \cdot I = 3 \cdot 12345$	$3 = 1245$
$4 \cdot I = 4 \cdot 12345$	$4 = 1235$
$12 \cdot I = 12 \cdot 12345$	$12 = 345$
$13 \cdot I = 13 \cdot 12345$	$13 = 245$
$14 \cdot I = 14 \cdot 12345$	$14 = 235$
$23 \cdot I = 23 \cdot 12345$	$23 = 145$
$24 \cdot I = 24 \cdot 12345$	$24 = 135$
$34 \cdot I = 34 \cdot 12345$	$34 = 125$
$123 \cdot I = 123 \cdot 12345$	$123 = 45$
$124 \cdot I = 124 \cdot 12345$	$124 = 35$
$234 \cdot I = 234 \cdot 12345$	$234 = 15$
$1234 \cdot I = 1234 \cdot 12345$	$1234 = 5$

Si osserva che tutte le interazioni del secondo ordine sono confuse con le interazioni del terzo ordine, mentre tutti gli effetti principali sono confusi con le interazioni del quarto ordine.

Essendo valida l'ipotesi che le interazioni del 3° e del 4° ordine non siano significative, si possono adottare i valori calcolati mediante l'ausilio della tabella per l'elaborazione del modello:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1 (i \neq j)}^5 b_{ij} x_i x_j$$

In base ai dati rilevati nelle sedici prove, si possono agevolmente calcolare gli effetti principali e le interazioni del secondo ordine:

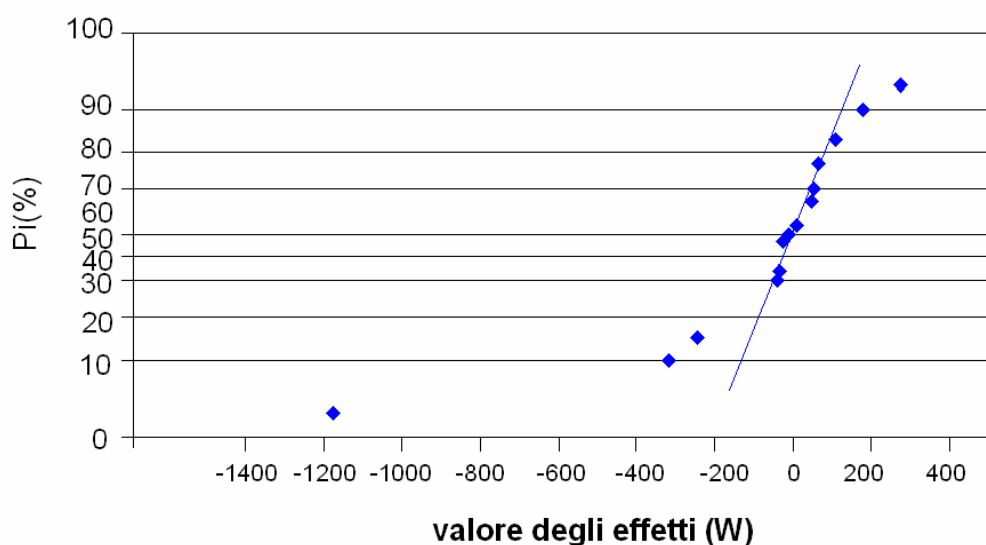
N°	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	y _i (W)	I	E ₁	E ₂	E ₃	E ₄	E ₅	E ₁₂	E ₁₃	E ₁₄	E ₁₅	E ₂₃	E ₂₄	E ₂₅	E ₃₄	E ₃₅	E ₄₅
1	-1	-1	-1	-1	+1	3318	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1
2	+1	-1	-1	-1	-1	4141	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
3	-1	+1	-1	-1	-1	3790	+1	-1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1
4	+1	+1	-1	-1	+1	3765	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1
5	-1	-1	+1	-1	-1	3431	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
6	+1	-1	+1	-1	+1	3425	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1
7	-1	+1	+1	-1	+1	3507	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1
8	+1	+1	+1	-1	-1	3765	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	-1	+1
9	-1	-1	-1	+1	-1	2580	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1
10	+1	-1	-1	+1	+1	2450	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1
11	-1	+1	-1	+1	+1	2319	+1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
12	+1	+1	-1	+1	-1	3067	+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1
13	-1	-1	+1	+1	+1	1925	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1
14	+1	-1	+1	+1	-1	2466	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1
15	-1	+1	+1	+1	-1	2485	+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1
16	+1	+1	+1	+1	+1	2450	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

$$\begin{array}{lllll}
E_1 = 272 \text{ W} & E_2 = 176 \text{ W} & E_3 = -247 \text{ W} & E_4 = -1175 \text{ W} & E_5 = -321 \text{ W} \\
E_{12} = -35 \text{ W} & E_{13} = -82 \text{ W} & E_{14} = 9 \text{ W} & E_{15} = -16 \text{ W} & E_{23} = 63 \text{ W} \\
E_{24} = 48 \text{ W} & E_{25} = 54 \text{ W} & E_{34} = -25 \text{ W} & E_{35} = 111 \text{ W} & E_{45} = -43 \text{ W}
\end{array}$$

Ci si avvalga del metodo della curva di probabilità cumulativa per individuare gli elementi significativi:

	valore (W)	ordine crescente (W)			probabilità cumulativa %
E ₁	272	1	E ₄	-1175	3,33
E ₂	176	2	E ₅	-321	10,00
E ₃	-247	3	E ₃	-247	16,67
E ₄	-1175	4	E ₁₃	-82	23,33
E ₅	-321	5	E ₄₅	-43	30,00
E ₁₂	-35	6	E ₁₂	-35	36,67
E ₁₃	-82	7	E ₃₄	-25	43,33
E ₁₄	9	8	E ₁₅	-16	50,00
E ₁₅	-16	9	E ₁₄	9	56,67
E ₂₃	63	10	E ₂₄	48	63,33
E ₂₄	48	11	E ₂₅	54	70,00
E ₂₅	54	12	E ₂₃	63	76,67
E ₃₄	-25	13	E ₃₅	111	83,33
E ₃₅	111	14	E ₂	176	90,00
E ₄₅	-43	15	E ₁	272	96,67

Diagramma della probabilità cumulativa



Dal diagramma che ben pochi elementi sono distinti dalla retta passante per il punto corrispondente al valore nullo in ascissa e al valore di probabilità cumulativa del 50%. Per tutti gli elementi interpolabili da tale retta, è verificata l'ipotesi di appartenenza ad una distribuzione gaussiana con media pari al valor nullo: il loro valor vero è zero.

Gli effetti significati sono i seguenti: E₄, E₅, E₃, E₂, E₁.

Il modello del processo in esame è il seguente:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5$$

b_0 è il valor medio delle 16 risposte del sistema: 3055 W.

Essendo: $b_i = \frac{E_i}{2}$, l'espressione del modello risulta:

$$y(W) = 3055 + 136x_1 + 88x_2 - 124x_3 - 588x_4 - 160x_5.$$

Si possono confrontare i valori realmente ottenuti nelle sedici combinazioni di prova e i sedici valori previsti dal modello ottenuto:

N°	$y_i(W)$	$y_i(\text{modello})(W)$	valore dei residui $e(W)$
1	3318	3382	-64
2	4141	3974	167
3	3790	3879	-89
4	3765	3830	-65
5	3431	3456	-25
6	3425	3407	19
7	3507	3311	196
8	3765	3904	-139
9	2580	2528	53
10	2450	2479	-29
11	2319	2383	-64
12	3067	2976	91
13	1925	1960	-35
14	2466	2552	-86
15	2485	2457	28
16	2450	2408	42

Al fine della validazione del modello si esegue l'analisi dei residui come precedentemente già mostrato.

§ 2.6 NATURA ITERATIVA DEL PIANO SPERIMENTALE

Un piano sperimentale deriva dalla scelta del modello interpretativo del processo. Se il modello è inadeguato, l'esperimento non dà luogo a risultati di alcun'utilità operativa. Le ragioni dell'inadeguatezza del modello sono le seguenti:

- mancata considerazione di parametri di influenza;
- presenza di effetti non lineari di fattori, determinati da campi di variazione significativamente estesi.

Qualora l'analisi dei residui e l'ANOVA, strumenti di validazione del piano sperimentale, forniscano un esito negativo, sono necessari:

- l'approfondimento dell'analisi teorica del sistema;
- l'elaborazione di un altro modello matematico;
- l'esecuzione di un nuovo piano sperimentale.

CAPITOLO TERZO

ROBUST DESIGN

§ 3.1 PROGETTARE IL SISTEMA RENDENDOLO INSENSIBILE AI DISTURBI (CAUSE DI VARIAZIONE NON CONTROLLABILI)

L'eccessiva variabilità delle prestazioni, dovuta a fattori non gestibili è un grave elemento dequalificante di un sistema. Gli elementi d'influenza sulla risposta di un processo, non controllabili sia per l'eccessiva aleatorietà che per ragioni di contenimento dei costi, si definiscono disturbi.

Con un'oculata progettazione è possibile ottenere, a basso costo, un sistema che sia il più possibile insensibile, robusto, ai disturbi. Il Robust Design si articola nelle seguenti fasi:

- progetto del sistema;
- progetto dei parametri;
- progetto delle tolleranze.

§ 3.1.1 PROGETTO DEL SISTEMA

Un nuovo sistema è concepito come risposta, il più possibile soddisfacente, a determinate esigenze di carattere sociale o commerciale (emerse da un'indagine di mercato).

Un buon progetto razionalizza il ciclo produttivo, cura al meglio le interfacce con l'operatore e il manutentore, ottimizzando gli aspetti ergonomici e di sicurezza, cura ogni fase del ciclo di vita del sistema: dall'ideazione alla dismissione, una volta divenuto obsolecente.

§ 3.1.2 PROGETTO DEI PARAMETRI

Determinata la configurazione costruttiva, devono essere stabiliti i valori ottimali delle caratteristiche dei componenti, in modo da minimizzare il decadimento prestazionale nell'intero arco di vita del sistema.

§ 3.1.3 PROGETTO DELLE TOLLERANZE

Scelti i valori ottimali delle caratteristiche dei componenti, si determinano le tolleranze ottimali, controllando i fattori di errore. Imponendo le tolleranze più rigide ai fattori maggiormente influenti sulla variabilità prestazionale, si minimizza lo scostamento dal valore di progetto dell'output del sistema.

§ 3.2 ROBUST DESIGN DI UNA CELLA DI CARICO

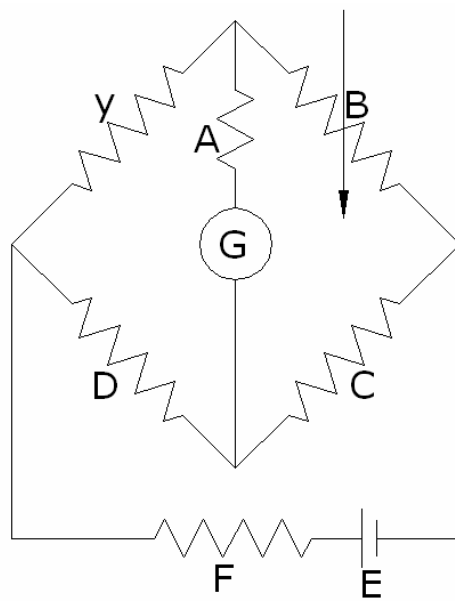
Una cella di carico si compone delle seguenti parti:

- due teste di afferraggio, necessarie per l'applicazione dello sforzo di trazione;
- un elemento tubolare di protezione;
- un perno, sul quale sono stampati gli estensimetri;
- il ponte di Wheatstone: circuito elettrico di alimentazione e misura.

L'applicazione del carico determina la deformazione degli estensimetri, sottili filamenti elettrici solidali al perno della cella, ottenendo una variazione del valore di resistenza elettrica in base alla relazione: $R = \rho \frac{L}{S}$ (L ed S sono rispettivamente la lunghezza e l'area della sezione del filamento, ρ è la resistività). L'accuratezza del sistema di misura è dovuta principalmente al ponte di Wheatstone.

§ 3.2.1 PROGETTO DEI PARAMETRI E DELLE TOLLERANZE DEL PONTE DI WHEATSTONE.

Si prenda in esame lo schema del ponte di Wheatstone finalizzato alla determinazione della resistenza y.



Si determinino i valori ottimali delle resistenze A, C, D, F e della forza motrice E, in maniera che la resistenza y venga misurata con il richiesto grado di precisione.

Durante la misura si interviene sul reostato B al fine di azzerare la lettura del galvanometro G.

Vengano indicati 3 livelli per ognuno dei parametri:

fattori	livello 1	livello 2	livello 3
resistenza A	20 Ω	100 Ω	500 Ω
resistenza C	2 Ω	10 Ω	50 Ω
resistenza D	2 Ω	10 Ω	50 Ω
f.e.m. E	1,2 V	6 V	30 V
resistenza F	2 Ω	10 Ω	50 Ω

L'ottimizzazione dei parametri è finalizzata a minimizzare la sensibilità dello strumento alle cause di variazione dei componenti. Si considerino 3 livelli di variabilità di questi ultimi e 3 classi di precisione per il galvanometro:

errori	livello 1	livello 2	livello 3
errore resistenza A (%)	-0,3	0	0,3
errore resistenza B (%)	-0,3	0	0,3
errore resistenza C (%)	-0,3	0	0,3
errore resistenza D (%)	-0,3	0	0,3
errore f.e.m. E (%)	-5,0	0	5,0
errore resistenza F (%)	-0,3	0	0,3
errore galvanometro	-0,2mA	0	0,2mA

Si noti il rilevante errore ammesso per il valore della f.e.m., che consente l'impiego di una batteria commerciale.

Il valore della resistenza y si determina regolando il reostato B finché la corrente rilevata dal galvanometro si azzeri. In tale condizioni si verifica la

condizione: $y = \frac{BD}{C}$.

Ipotizzando un errore di lettura del galvanometro (X), l'espressione approssimata del valore vero della resistenza y , è la seguente:

$$y = \frac{BD}{C} - \frac{X}{C^2 E} [A(D+C) + D(B+C)] \cdot [B(C+D) + F(B+C)]$$

Si scelgono due matrici: una interna, inerente le possibili combinazioni dei livelli dei parametri di controllo, e l'altra esterna, relativa alle possibili combinazioni dei livelli dei fattori di disturbo. Le matrici, di identica struttura, di tipo L_{36} , hanno 36 righe e 13 colonne. La struttura delle matrici è ortogonale: scelte due colonne a caso, le nove combinazioni dei livelli: (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) sono presenti un ugual numero di volte (4):

Matrice interna

	A	e	C	D	E	F	e	e	e	e	e	e	e
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1
4	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	1
5	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1	1	1	1
6	3	3	3	3	1	1	1	1	2	2	2	2	1
7	1	1	2	3	1	2	3	3	1	2	2	3	1
8	2	2	3	1	2	3	1	1	2	3	3	1	1
9	3	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	1
10	1	1	3	2	1	3	2	3	2	1	3	2	1
11	2	2	1	3	2	1	3	1	3	2	1	3	1
12	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	2	1	1
13	1	2	3	1	3	2	1	3	3	2	1	2	2
14	2	3	1	2	1	3	2	1	1	3	2	3	2
15	3	1	2	3	2	1	3	2	2	1	3	1	2
16	1	2	3	2	1	1	3	2	3	3	2	1	2
17	2	3	1	3	2	2	1	3	1	1	3	2	2
18	3	1	2	1	3	3	2	1	2	2	1	3	2
19	1	2	1	3	3	3	1	2	2	1	2	3	2
20	2	3	2	1	1	1	2	3	3	2	3	1	2
21	3	1	3	2	2	2	3	1	1	3	1	2	2
22	1	2	2	3	3	1	2	1	1	3	3	2	2
23	2	3	3	1	1	2	3	2	2	1	1	3	2
24	3	1	1	2	2	3	1	3	3	2	2	1	2
25	1	3	2	1	2	3	3	1	3	1	2	2	3
26	2	1	3	2	3	1	1	2	1	2	3	3	3
27	3	2	1	3	1	2	2	3	2	3	1	1	3
28	1	3	2	2	2	1	1	3	2	3	1	3	3
29	2	1	3	3	3	2	2	1	3	1	2	1	3
30	3	2	1	1	1	3	3	2	1	2	3	2	3
31	1	3	3	3	2	3	2	2	1	2	1	1	3
32	2	1	1	1	3	1	3	3	2	3	2	2	3
33	3	2	2	2	1	2	1	1	3	1	3	3	3
34	1	3	1	2	3	2	3	1	2	2	3	1	3
35	2	1	2	3	1	3	1	2	3	3	1	2	3
36	3	2	3	1	2	1	2	3	1	1	2	3	3

Matrice esterna

	A'	B'	C'	D'	E'	F'	X'	e	e	e	e	e	e
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1
4	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	1
5	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1	1	1	1
6	3	3	3	3	1	1	1	1	2	2	2	2	1
7	1	1	2	3	1	2	3	3	1	2	2	3	1
8	2	2	3	1	2	3	1	1	2	3	3	1	1
9	3	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	1
10	1	1	3	2	1	3	2	3	2	1	3	2	1
11	2	2	1	3	2	1	3	1	3	2	1	3	1
12	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	2	1	1
13	1	2	3	1	3	2	1	3	3	2	1	2	2
14	2	3	1	2	1	3	2	1	1	3	2	3	2
15	3	1	2	3	2	1	3	2	2	1	3	1	2
16	1	2	3	2	1	1	3	2	3	3	2	1	2
17	2	3	1	3	2	2	1	3	1	1	3	2	2
18	3	1	2	1	3	3	2	1	2	2	1	3	2
19	1	2	1	3	3	3	1	2	2	1	2	3	2
20	2	3	2	1	1	1	2	3	3	2	3	1	2
21	3	1	3	2	2	2	3	1	1	3	1	2	2
22	1	2	2	3	3	1	2	1	1	3	3	2	2
23	2	3	3	1	1	2	3	2	2	1	1	3	2
24	3	1	1	2	2	3	1	3	3	2	2	1	2
25	1	3	2	1	2	3	3	1	3	1	2	2	3
26	2	1	3	2	3	1	1	2	1	2	3	3	3
27	3	2	1	3	1	2	2	3	2	3	1	1	3
28	1	3	2	2	2	1	1	3	2	3	1	3	3
29	2	1	3	3	3	2	2	1	3	1	2	1	3
30	3	2	1	1	1	3	3	2	1	2	3	2	3
31	1	3	3	3	2	3	2	2	1	2	1	1	3
32	2	1	1	1	3	1	3	3	2	3	2	2	3
33	3	2	2	2	1	2	1	1	3	1	3	3	3
34	1	3	1	2	3	2	3	1	2	2	3	1	3
35	2	1	2	3	1	3	1	2	3	3	1	2	3
36	3	2	3	1	2	1	2	3	1	1	2	3	3

Dall'esame delle matrici, si osserva che non vengono prese in esame le interazioni fra i parametri e le cause di errore, ma solo gli effetti principali. Le colonne non impiegate per il calcolo degli effetti sono riservate alla valutazione dell'errore. La struttura della matrice è tale da rendere il più possibile distribuita sulle 13 colonne l'influenza delle interazioni di ogni coppia di fattori.

Genichi Taguchi, uno dei principali teorici del Robust Design, afferma: “Il problema della determinazione dei valori ottimali delle grandezze di controllo di un processo, o di influenza per una determinata caratteristica di un sistema, è distinto dal problema della determinazione della vera relazione funzionale fra i parametri e la funzione obiettivo.”

Tale affermazione è del tutto in disaccordo con quanti hanno sviluppato la sperimentazione fattoriale e la metodologia della superficie di risposta (argomento di un prossimo capitolo), per i quali l’ottimizzazione non può prescindere dall’individuazione del modello analitico interpretativo del fenomeno.

Si ipotizzi che il valore vero della resistenza da misurare sia $y = 2\Omega$, il valore della resistenza B, regolato in modo che il galvanometro rilevi un’intensità nulla di corrente, dipende dai valori delle resistenze C e D: $2\Omega = \frac{BD}{C} \rightarrow B = 2\Omega \frac{C}{D}$.

Si può determinare in corrispondenza di ognuna delle 36 combinazioni dei livelli (righe) della matrice interna, inerente i parametri di controllo, l’espressione dell’errore di misura in corrispondenza delle 36 combinazioni della matrice esterna, inerente le cause di variazione.

Si impiega allo scopo la seguente relazione approssimata:

$$e = -\frac{X}{C^2 E} [A(D + C) + D(B + C)] \cdot [B(C + D) + F(B + C)]$$

Ci si riferisca alla combinazione dei livelli dei parametri di controllo, relativa alla riga n°7 della matrice interna. I relativi livelli di variabilità delle caratteristiche dei componenti, e i livelli di precisione del galvanometro risultano:

	livello 1	livello 2	livello 3
A'	14Ω	20Ω	26Ω
B'	0,3Ω	0,4Ω	0,5Ω
C'	7Ω	10Ω	13Ω
D'	35Ω	50Ω	65Ω
E'	0,8V	1,2V	1,6V
F'	7Ω	10Ω	13Ω
X'	-0,2mA	0	0,2mA

I valori dell'errore di misura in corrispondenza delle 36 righe della matrice esterna, risultano:

Combinazione dei livelli dei parametri di controllo relativa alla riga n°7 della matrice interna														Errore di misura (Ω)
N	A'	B'	C'	D'	E'	F'	X'	e	e	e	e	e	e	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,38
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0,00
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1	-0,35
4	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	1	0,00
5	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1	1	1	1	-0,35
6	3	3	3	3	1	1	1	1	2	2	2	2	1	0,39
7	1	1	2	3	1	2	3	3	1	2	2	3	1	-0,39
8	2	2	3	1	2	3	1	1	2	3	3	1	1	0,37
9	3	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	1	0,00
10	1	1	3	2	1	3	2	3	2	1	3	2	1	0,00
11	2	2	1	3	2	1	3	1	3	2	1	3	1	-0,37
12	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	2	1	1	0,35
13	1	2	3	1	3	2	1	3	3	2	1	2	2	0,35
14	2	3	1	2	1	3	2	1	1	3	2	3	2	0,00
15	3	1	2	3	2	1	3	2	2	1	3	1	2	-0,37
16	1	2	3	2	1	1	3	2	3	3	2	1	2	-0,38
17	2	3	1	3	2	2	1	3	1	1	3	2	2	0,37
18	3	1	2	1	3	3	2	1	2	2	1	3	2	0,00
19	1	2	1	3	3	3	1	2	2	1	2	3	2	0,35
20	2	3	2	1	1	1	2	3	3	2	3	1	2	0,00
21	3	1	3	2	2	2	3	1	1	3	1	2	2	-0,37
22	1	2	2	3	3	1	2	1	1	3	3	2	2	0,00
23	2	3	3	1	1	2	3	2	2	1	1	3	2	-0,38
24	3	1	1	2	2	3	1	3	3	2	2	1	2	0,37
25	1	3	2	1	2	3	3	1	3	1	2	2	3	-0,37
26	2	1	3	2	3	1	1	2	1	2	3	3	3	0,35
27	3	2	1	3	1	2	2	3	2	3	1	1	3	0,00
28	1	3	2	2	2	1	1	3	2	3	1	3	3	0,37
29	2	1	3	3	3	2	2	1	3	1	2	1	3	0,00
30	3	2	1	1	1	3	3	2	1	2	3	2	3	-0,39
31	1	3	3	3	2	3	2	2	1	2	1	1	3	0,00
32	2	1	1	1	3	1	3	3	2	3	2	2	3	-0,35
33	3	2	2	2	1	2	1	1	3	1	3	3	3	0,39
34	1	3	1	2	3	2	3	1	2	2	3	1	3	-0,35
35	2	1	2	3	1	3	1	2	3	3	1	2	3	0,39
36	3	2	3	1	2	1	2	3	1	1	2	3	3	0,00
Media														0,00
Varianza														0,09

§ 3.2.1.1 RAPPORTO SEGNALE DISTURBO

È un'espressione strettamente correlata alla variabilità di un sistema, allo scostamento dal valore nominale di una grandezza di interesse: $\eta = \frac{m^2}{\sigma^2}$.

m è il valor medio della grandezza, σ^2 è la varianza.

Il rapporto assume valori tanto maggiori quanto è ridotta la varianza.

Considerati n valori di una variabile: $y_1, y_2, \dots, y_n$, si definisca:

$$S_m = \frac{(y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2}{n}.$$

$$\text{La stima della varianza risulta: } V_e = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

Una buona stima di m^2 , che tenga conto dell'inevitabile errore nella determinazione della stima del valor medio della grandezza, è la seguente espressione: $m^{2*} = \frac{1}{n}(S_m - V_e)$.

$$\text{L'espressione del rapporto segnale risulta pertanto: } \eta = \frac{\frac{1}{n}(S_m - V_e)}{V_e}$$

Il rapporto, qualora non negativo, viene espresso generalmente in decibel:

$$\eta = 10 \log \left[\frac{\frac{1}{n}(S_m - V_e)}{V_e} \right].$$

Si calcolino per ognuna delle 36 righe della matrice interna, i valori dell'errore di misura relativi alle 36 combinazioni dei livelli dei fattori di disturbo. Il valore del segnale, resistenza y , è la somma del valore ipotizzato (2Ω) e del valore dell'errore di misura.

Per le 36 combinazioni dei livelli dei parametri, si possono ottenere le stime dei rapporti η .

	A	e	C	D	E	F	E	e	e	e	e	e	e	$\eta(\text{dB})$
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	31,0
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	25,8
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1	15,3
4	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	1	36,7
5	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1	1	1	1	27,7
6	3	3	3	3	1	1	1	1	2	2	2	2	1	6,4
7	1	1	2	3	1	2	3	3	1	2	2	3	1	16,3
8	2	2	3	1	2	3	1	1	2	3	3	1	1	12,1
9	3	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	1	28,0
10	1	1	3	2	1	3	2	3	2	1	3	2	1	14,9
11	2	2	1	3	2	1	3	1	3	2	1	3	1	14,3
12	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	2	1	1	25,4
13	1	2	3	1	3	2	1	3	3	2	1	2	2	63,6
14	2	3	1	2	1	3	2	1	1	3	2	3	2	-9,4
15	3	1	2	3	2	1	3	2	2	1	3	1	2	14,5
16	1	2	3	2	1	1	3	2	3	3	2	1	2	28,9
17	2	3	1	3	2	2	1	3	1	1	3	2	2	6,8
18	3	1	2	1	3	3	2	1	2	2	1	3	2	14,6
19	1	2	1	3	3	3	1	2	2	1	2	3	2	21,3
20	2	3	2	1	1	1	2	3	3	2	3	1	2	17,2
21	3	1	3	2	2	2	3	1	1	3	1	2	2	13,8
22	1	2	2	3	3	1	2	1	1	3	3	2	2	53,4
23	2	3	3	1	1	2	3	2	2	1	1	3	2	5,4
24	3	1	1	2	2	3	1	3	3	2	2	1	2	-9,2
25	1	3	2	1	2	3	3	1	3	1	2	2	3	27,3
26	2	1	3	2	3	1	1	2	1	2	3	3	3	45,6
27	3	2	1	3	1	2	2	3	2	3	1	1	3	#NUM!
28	1	3	2	2	2	1	1	3	2	3	1	3	3	53,9
29	2	1	3	3	3	2	2	1	3	1	2	1	3	40,0
30	3	2	1	1	1	3	3	2	1	2	3	2	3	#NUM!
31	1	3	3	3	2	3	2	2	1	2	1	1	3	22,9
32	2	1	1	1	3	1	3	3	2	3	2	2	3	45,7
33	3	2	2	2	1	2	1	1	3	1	3	3	3	-1,1
34	1	3	1	2	3	2	3	1	2	2	3	1	3	44,3
35	2	1	2	3	1	3	1	2	3	3	1	2	3	-8,6
36	3	2	3	1	2	1	2	3	1	1	2	3	3	7,8

In corrispondenza delle righe 27 e 30 non è possibile indicare il valore espresso in dB del rapporto segnale disturbo, in quanto l'argomento del logaritmo è negativo.

La scelta dei valori delle resistenze A, C, D, F e della f.e.m. E, per le quali si ottiene il maggior valore di η , determina il minor decadimento nel tempo della precisione del sistema di misura, a fronte del deperimento delle caratteristiche dei componenti.

η è un indice quantitativo della stabilità del sistema, esprime quanto quest'ultimo sia robusto nei riguardi delle cause di variabilità.

Si osserva che la combinazione dei parametri ottimale è quella relativa alla riga n. 22 della matrice interna: (A = 20 Ω , C = 10 Ω , D = 50 Ω , E = 30V, F = 2 Ω).

§ 3.2.1.2 CALCOLO DEGLI EFFETTI DEI PARAMETRI

Si valuti il peso dei diversi fattori ai fini del decadimento nel tempo della precisione del ponte di Wheatstone. Il calcolo degli effetti principali dei parametri si esegue in base ai valori del rapporto S/N. Per ciascun fattore si determinano le tre somme degli S/N inerenti i tre gruppi di dodici righe della matrice interna caratterizzate dal livello del parametro omogeneo.

Si consideri il valore della resistenza A. La somma dei valori di η , relativi alle dodici righe in cui il livello di A è 1, corrispondente alla resistenza di 20 Ω , risulta: 414,7 dB.

Le somme inerenti i livelli 2 e 3 della resistenza A, corrispondenti ai valori di 100 e 500 Ω , risultano rispettivamente: 222,5 e 115,4 dB.

La somma di tutti e trentasei valori di η , è 752,6 dB.

L'espressione dell'effetto principale di A è:

$$S_A (dB^2) = \frac{414,7^2 + 222,5^2 + 115,4^2}{12} - \frac{752,6^2}{36} = 3832,9 dB^2$$

Il valore indica la quota parte di variazione dei valori di η , dovuta alla variazione di valore del parametro A.

Con la stessa modalità è possibile determinare le espressioni degli effetti principali degli altri parametri.

L'espressione rappresentativa della variazione totale dei valori di η , è la seguente:

$$S_T(dB^2) = 31,0^2 + 25,8^2 + + 7,8^2 - \frac{752,6^2}{36} = 11935,0 dB^2$$

Tale valore è la somma corretta dei quadrati dei trentasei valori di η .

Si hanno tutti gli elementi necessari per l'elaborazione della tabella dell'ANOVA:

causa di variazione	somma dei quadrati (dB^2)	gradi di libertà	media dei quadrati (dB^2)
A	3832,9	2	1916,5
C	218,7	2	109,4
D	331,6	2	165,8
E	4441,7	2	2220,9
F	1974,6	2	987,3
e	1135,5	25	45,4
totale	11935,0	35	

Dal confronto dei valori riportati nell'ultima colonna con il valore relativo all'errore (45,4 dB), si rileva il grado di significatività dei diversi parametri. Si constata che i fattori realmente determinanti, a seconda della scelta dei relativi livelli, sono: le resistenze A ed F, e la f.e.m. della batteria, E.

Si determini per ciascun livello di ogni parametro il valor medio del rapporto η :

livello	A(dB)	C(dB)	D(dB)	E(dB)	F(dB)
1	34,6	20,9	26,1	10,1	28,9
2	18,5	22,2	19,9	18,9	23,3
3	11,5	23,1	18,4	35,4	11,7

Dall'esame di tali dati risulta che la combinazione ottimale dei livelli dei fattori è: A₁, C₃, D₁, E₃, F₁, corrispondente ai valori: A=20 Ω , C=50 Ω , D=2 Ω , E=30V, F=2 Ω .

La combinazione determinata differisce per i fattori C e D, di scarsa influenza, da quella indicata dalla riga 22^a della matrice interna in corrispondenza della quale si ha il massimo valore del rapporto η : A₁, C₂, D₃, E₃, F₁.

Essendo scarsamente influente sulla prestazione del sistema, la scelta delle resistenze C e D, è dettata da considerazioni di carattere economico.

§ 3.2.1.3 PROGETTO DELLE TOLLERANZE

Ottenuti i valori ottimali dei parametri, bisogna determinare i livelli ammissibili di variazione delle caratteristiche dei componenti del sistema, in modo da ottenere il livello migliore possibile di precisione per l'intera durata di impiego dello strumento.

In funzione dei livelli di variabilità delle caratteristiche dei componenti del ponte di Wheatstone:

errori	livello 1	livello 2	livello 3
errore resistenza A (%)	-0,3	0	0,3
errore resistenza B (%)	-0,3	0	0,3
errore resistenza C (%)	-0,3	0	0,3
errore resistenza D (%)	-0,3	0	0,3
errore f.e.m. E (%)	-5,0	0	5,0
errore resistenza F (%)	-0,3	0	0,3
errore galvanometro	-0,2mA	0	0,2mA

si ottengono, scegliendo la combinazione ottimale dei livelli dei parametri, in corrispondenza delle trentasei righe della matrice esterna, i valori dell'errore di misura:

Combinazione ottimale dei livelli dei parametri di controllo													Errore di misura (Ω)
N	A'	B'	C'	D'	E'	F'	X'	e	e	e	e	e	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,01
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0,00
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1	-0,01
4	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	1	0,00
5	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1	1	1	-0,01
6	3	3	3	3	1	1	1	1	2	2	2	1	0,01
7	1	1	2	3	1	2	3	3	1	2	2	1	-0,01
8	2	2	3	1	2	3	1	1	2	3	3	1	0,01
9	3	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	0,00
10	1	1	3	2	1	3	2	3	2	1	3	2	0,00
11	2	2	1	3	2	1	3	1	3	2	1	3	-0,01
12	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	2	1	0,01
13	1	2	3	1	3	2	1	3	3	2	1	2	0,01
14	2	3	1	2	1	3	2	1	1	3	2	3	0,00
15	3	1	2	3	2	1	3	2	2	1	3	1	-0,01
16	1	2	3	2	1	1	3	2	3	3	2	1	-0,01
17	2	3	1	3	2	2	1	3	1	1	3	2	0,01
18	3	1	2	1	3	3	2	1	2	2	1	3	0,00
19	1	2	1	3	3	3	1	2	2	1	2	3	0,01
20	2	3	2	1	1	1	2	3	3	2	3	1	0,00
21	3	1	3	2	2	2	3	1	1	3	1	2	-0,01
22	1	2	2	3	3	1	2	1	1	3	3	2	0,00
23	2	3	3	1	1	2	3	2	2	1	1	3	-0,01
24	3	1	1	2	2	3	1	3	3	2	2	1	0,01
25	1	3	2	1	2	3	3	1	3	1	2	2	-0,01
26	2	1	3	2	3	1	1	2	1	2	3	3	0,01
27	3	2	1	3	1	2	2	3	2	3	1	1	0,00
28	1	3	2	2	2	1	1	3	2	3	1	3	0,01
29	2	1	3	3	3	2	2	1	3	1	2	1	0,00
30	3	2	1	1	1	3	3	2	1	2	3	2	-0,01
31	1	3	3	3	2	3	2	2	1	2	1	1	0,00
32	2	1	1	1	3	1	3	3	2	3	2	2	-0,01
33	3	2	2	2	1	2	1	1	3	1	3	3	0,01
34	1	3	1	2	3	2	3	1	2	2	3	1	-0,01
35	2	1	2	3	1	3	1	2	3	3	1	2	0,01
36	3	2	3	1	2	1	2	3	1	1	2	3	0,00
Media													0,00
Varianza													0,00

Si formulano le espressioni degli effetti principali dei fattori di disturbo, impiegando i polinomi ortogonali.

Una relazione fra due grandezze y ed x può essere approssimata mediante i polinomi ortogonali. Considerando un intervallo di variazione della variabile x di ampiezza pari a d , un numero a di livelli equispaziati di x , si possono determinare i coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$, per i quali si abbia: $y = \alpha_0 + \alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x) + \varepsilon$.

Si riportano le espressioni dei polinomi ortogonali del 1° e del 2° ordine:

$$P_1(x) = \lambda_1 \left[\frac{(x - \bar{x})}{d} \right]$$

$$P_2(x) = \lambda_2 \left[\left(\frac{x - \bar{x}}{d} \right)^2 - \left(\frac{a^2 - 1}{12} \right) \right].$$

I coefficienti λ_1 e λ_2 , hanno valore tale da rendere unitari i polinomi.

I polinomi si definiscono ortogonali in quanto, risulta verificata la condizione:

$$\sum_{i=1}^a P_r(x_i) P_s(x_i) = 0 \quad r \neq s$$

I tre livelli equispaziati di variabilità delle caratteristiche dei componenti, presi in considerazione in sede di progetto dei parametri, si possono esprimere:

$$\text{livello 1} \quad m - \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma$$

$$\text{livello 2} \quad m$$

$$\text{livello 3} \quad m + \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma$$

m è il valore nominale della caratteristica del componente,

σ è la deviazione standard.

Si esprimano le somme dei quadrati inerenti i componenti lineari e quadratici degli effetti principali dei fattori di disturbo in base ai valori ottenuti dell'errore di misura in corrispondenza della combinazione ottimale dei livelli dei parametri.

La somma dei quadrati per un generico componente polinomiale è:

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^a c_i y'_i \right)^2}{n \sum_{i=1}^a c_i^2}$$

I valori dei coefficienti polinomiali del primo e del secondo ordine, per tre livelli della variabile sono:

	P ₁	P ₂
c ₁	-1	1
c ₂	0	-2
c ₃	1	1

y'_i è la somma dei dati inerenti ciascun livello.

Si calcolino i componenti lineari e quadratici inerenti gli effetti principali della variabilità dei diversi parametri:

$$S_A(L) = \frac{[-1(-9,3) + 0(4,5) + 1(4,9)]^2}{12 \cdot 2} 10^{(-8)} = 8,3 \cdot 10^{(-8)}$$

$$S_A(Q) = \frac{[1(-9,3) + 2(4,5) + 1(4,9)]^2}{12 \cdot 6} 10^{(-8)} = 0,3 \cdot 10^{(-8)}$$

$$S_B(L) = \frac{[-1(4,6) + 0(-9,7) + 1(5,1)]^2}{12 \cdot 2} 10^{(-8)} = 0,0 \cdot 10^{(-8)}$$

$$S_B(Q) = \frac{[1(4,6) + 2(-9,7) + 1(5,1)]^2}{12 \cdot 6} 10^{(-8)} = 1,3 \cdot 10^{(-8)}$$

$$S_C(L) = \frac{[-1(4,3) + 0(5,3) + 1(-9,5)]^2}{12 \cdot 2} 10^{(-8)} = 8,0 \cdot 10^{(-8)}$$

$$S_C(Q) = \frac{[1(4,3) + 2(5,3) + 1(-9,5)]^2}{12 \cdot 6} 10^{(-8)} = 0,4 \cdot 10^{(-8)}$$

$$S_D(L) = \frac{[-1(-9,6) + 0(4,9) + 1(4,7)]^2}{12 \cdot 2} 10^{(-8)} = 8,6 \cdot 10^{(-8)}$$

$$S_D(Q) = \frac{[1(-9,6) + 2(4,9) + 1(4,7)]^2}{12 \cdot 6} 10^{(-8)} = 0,3 \cdot 10^{(-8)}$$

$$S_E(L) = \frac{[-1(0,7) + 0(-0,3) + 1(-0,4)]^2}{12 \cdot 2} 10^{(-8)} = 0,1 \cdot 10^{(-8)}$$

$$S_E(Q) = \frac{[1(0,7) + 2(-0,3) + 1(-0,4)]^2}{12 \cdot 6} 10^{(-8)} = 0,0 \cdot 10^{(-8)}$$

$$S_F(L) = \frac{[-1(-9,6) + 0(4,9) + 1(4,7)]^2}{12 \cdot 2} 10^{(-8)} = 8,6 \cdot 10^{(-8)}$$

$$S_F(Q) = \frac{[1(-9,6) + 2(4,9) + 1(4,7)]^2}{12 \cdot 6} 10^{(-8)} = 0,3 \cdot 10^{(-8)}$$

$$S_X(L) = \frac{[-1(1112,9) + 0(0,0) + 1(-1112,9)]^2}{12 \cdot 2} 10^{(-8)} = 206425,9 \cdot 10^{(-8)}$$

$$S_X(Q) = \frac{[1(1112,9) + 2(0,0) + 1(-1112,9)]^2}{12 \cdot 6} 10^{(-8)} = 0,0 \cdot 10^{(-8)}$$

Si calcoli il contributo della media alla variazione dei dati inerente l'errore di

misura: $S_M = \frac{(0,1 \cdot 10^{(-4)})^2}{36} = 8,8 \cdot 10^{(-40)}$

La base della potenza a numeratore della frazione è la somma dei trentasei dati inerente l'errore di misura.

La somma totale dei quadrati dei valori di quest'ultimo risulta:

$$S_{totale} = 206774 \cdot 10^{(-8)}$$

Si riassumano i valori calcolati nella tabella dell'ANOVA:

causa di variazione	somma dei quadrati ($10^{-8} \Omega^2$)	gradi di libertà	media dei quadrati ($10^{-8} \Omega^2$)
m	$8,8 \cdot 10^{-5}$	1	$8,8 \cdot 10^{-5}$
A (L)	8,3	1	8,3
A (Q)	0,3	1	0,3
B (L)	0,0	1	0,0
B (Q)	1,3	1	1,3
C (L)	8,0	1	8,0
C (Q)	0,4	1	0,4
D (L)	8,6	1	8,6
D (Q)	0,3	1	0,3
E (L)	0,1	1	0,1
E (Q)	0,0	1	0,0
F (L)	8,6	1	8,6
F (Q)	0,3	1	0,3
X (L)	206425,9	1	206425,9
X (Q)	0,0	1	0,0
e	311,9	21	14,9
totale	206774,0	36	

Si osserva da tale analisi che la maggiore incidenza nell'errore della lettura dello strumento è da attribuire al galvanometro.

Impiegando uno strumento di classe di precisione superiore si ottiene una notevole riduzione della varianza dell'errore di misura.

Si osserva che la più scarsa influenza nella determinazione dell'errore di misura è da attribuire alla f.e.m. della batteria.

§ 3.3 CRITICA AL ROBUST DESIGN DI TAGUCHI

Lo sviluppo di un prodotto articolato nelle tre fasi illustrate:

- progetto del sistema;
- progetto dei parametri;
- progetto delle tolleranze,

è la modalità migliore possibile per ottenere la soddisfazione dell'utilizzatore nell'intero ciclo di vita.

Tuttavia sono criticabili i piani sperimentali adottati da Taguchi, che non mirano alla determinazione di un modello attendibile della risposta del sistema in quanto non prendono in esame le interazioni dei fattori.

Si vedrà nel prossimo capitolo come si possano elaborare modelli analitici che tengano conto della risposta di un sistema e della relativa variabilità, in maniera alternativa al ricorso del rapporto S/N (segnale/disturbo), senza rinunciare all'ottenimento della effettiva relazione funzionale fra i parametri.

CAPITOLO QUARTO

METODO DELLA SUPERFICIE DI RISPOSTA

§ 4.1 LA SUPERFICIE DI RISPOSTA DI UN PROCESSO: DETERMINAZIONE DEI VALORI OTTIMALI DEI PARAMETRI

La metodologia della superficie di risposta si avvale di un insieme di tecniche matematiche e statistiche per elaborare un modello interpretativo del comportamento di un sistema, la cui risposta di interesse è condizionata da un numero rilevante di parametri.

L'applicazione della RSM si concretizza nella determinazione di adatte approssimazioni, valide per determinati campi di valori dei parametri d'influenza, della relazione funzionale fra questi ultimi e la caratteristica del sistema da ottimizzare. Tipicamente vengono impiegate espressioni polinomiali di basso grado, che vengono adattate ai dati sperimentali impiegando il metodo dei minimi quadrati. Per un'accurata stima dei coefficienti delle espressioni analitiche, la metodologia RSM si avvale di dati rilevati in opportuni piani sperimentali.

Quando le condizioni del processo in studio sono lontane dall'ottimo, si elabora un modello lineare che consenta allo sperimentatore di pervenire il più rapidamente possibile in prossimità delle condizioni ottimali. Successivamente per determinare con maggiore accuratezza le migliori condizioni possibili, si ricorre ad un modello del secondo ordine. A tali modelli corrispondono diversi piani sperimentali.

L'analisi RSM può essere visualizzata come una “ ascesa di un colle”, la cui sommità rappresenti il punto di massimo della risposta del sistema, o come una “discesa nel fondo di una valle”, nel caso in cui la condizione ottimale è data dal minimo valore possibile di una determinata caratteristica.

§ 4.2 RAPIDO AVVICINAMENTO ALLE CONDIZIONI OTTIMALI (STEEPEST ASCENT)

Nel caso in cui un processo è lontano dalle condizioni ottimali, si ricorre ad una procedura sperimentale semplice e rapida, basata sull'ipotesi che un modello lineare rappresenti in maniera adeguata la reale relazione funzionale fra la caratteristica di interesse e i parametri, in un ristretto intervallo di variazione di questi ultimi.

Tale procedura si realizza in una sequenza di modifiche apportate ai parametri di regolazione del processo nella direzione di massimo incremento della risposta del sistema da massimizzare, o nella direzione di massimo decremento, qualora si debba minimizzare il valore di una grandezza.

Si prenda in esame un'applicazione inerente un complesso processo di sintesi.

In relazione alla purezza del prodotto vengono individuati i seguenti fattori d'influenza:

- ξ_1 : durata del processo;
- ξ_2 : temperatura alla quale si ha la reazione.

I valori inizialmente impiegati dei due parametri sono:

- $\xi_1 = 35 \text{ min}$;
- $\xi_2 = 68^\circ\text{C}$

per tali valori si ottiene una purezza iniziale del 40%.

Si ritiene di essere sufficientemente distanti dalle condizioni ottimali. Si adatta il modello lineare della risposta del sistema al seguente campo di variazione dei parametri:

- ξ_1 : [30 min. ; 40 min.]
- ξ_2 : [65°C ; 71°C]

Si introducano le variabili codificate x_1 e x_2 , tali che:

$$\begin{array}{llll} x_1 = -1 & \text{per } \xi_1 = 30 \text{ min} & x_1 = +1 & \text{per } \xi_1 = 40 \text{ min} \\ x_2 = -1 & \text{per } \xi_2 = 65^\circ\text{C} & x_2 = +1 & \text{per } \xi_2 = 71^\circ\text{C} \end{array}$$

Si ricavano i dati necessari per la determinazione del modello lineare da un piano sperimentale fattoriale 2^2 che comprende 5 osservazioni in corrispondenza delle condizioni di partenza, rappresentate dai valori nulli delle variabili codificate.

Dalle ripetute osservazioni in corrispondenza di $x_1 = 0$ ed $x_2 = 0$, si ha la stima dell'errore sperimentale, elemento di analisi dell'adeguatezza del modello lineare.

I dati di tale particolare piano sperimentale sono i seguenti:

ξ_1 (min.)	ξ_2 ($^\circ\text{C}$)	x_1	x_2	$y(\%)$
30	65	-1	-1	39,3
40	65	+1	-1	40,9
30	71	-1	+1	40,0
40	71	+1	+1	41,5
35	68	0	0	40,3
35	68	0	0	40,5
35	68	0	0	40,7
35	68	0	0	40,2
35	68	0	0	40,6

Si adattino ai dati rilevati l'espressione analitica:

$$y = \beta_0 + \beta_1(\xi_1 - \bar{\xi}_1) + \beta_2(\xi_2 - \bar{\xi}_2) + \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & S_{\xi_1\xi_1} & S_{\xi_1\xi_2} \\ 0 & S_{\xi_1\xi_2} & S_{\xi_2\xi_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^9 y_i \\ S_{y\xi_1} \\ S_{y\xi_2} \end{bmatrix}$$

Si determinino i valori dei coefficienti con il metodo dei minimi quadrati:

I valori delle somme dei quadrati corretti che compaiono nella matrice sono i seguenti:

$$S_{\xi_1 \xi_2} = \sum_{i=1}^9 (\xi_{1i} - \bar{\xi}_1)(\xi_{2i} - \bar{\xi}_2) = 0,0 \text{ min } ^\circ\text{C}$$

$$S_{\xi_1 \xi_1} = \sum_{i=1}^9 (\xi_{1i} - \bar{\xi}_1)^2 = 100,0 \text{ min}^2$$

$$S_{\xi_2 \xi_2} = \sum_{i=1}^9 (\xi_{2i} - \bar{\xi}_2)^2 = 36,0 ^\circ\text{C}^2$$

$$S_{\xi_1 y} = \sum_{i=1}^9 y_i (\xi_{1i} - \bar{\xi}_1) = 15,5 \text{ min } \%$$

$$S_{\xi_2 y} = \sum_{i=1}^9 y_i (\xi_{2i} - \bar{\xi}_2) = 3,9 ^\circ\text{C} \%$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 40,444\% \\ \beta_1 &= 0,155 \text{ } \%/ \text{min} \\ \beta_2 &= 0,108 \text{ } \%/ ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

L'espressione del modello lineare risulta nelle variabili naturali e codificate:

$$\hat{y}(\%) = 40,444 + 0,155 (\xi_1 - \bar{\xi}_1) + 0,108 (\xi_2 - \bar{\xi}_2)$$

$$\hat{y}(\%) = 40,444 + 0,775x_1 + 0,325x_2$$

Ottenuta l'espressione del modello, il procedimento si articola nelle seguenti fasi:

- 1) stima dell'errore sperimentale;
- 2) analisi dell'adeguatezza del modello in merito all'interazione fra i fattori presi in esame;
- 3) esame dell'adeguatezza nei riguardi degli effetti quadratici (la curvatura della superficie di risposta).

Si impieghino i dati relativi al punto ($x_1 = 0$; $x_2 = 0$) per ottenere la stima della varianza:

$$s^2(\%) = \frac{(40,3)^2 + (40,5)^2 + (40,7)^2 + (40,2)^2 + (40,6)^2 - \frac{(40,3 + 40,5 + 40,7 + 40,2 + 40,6)^2}{5}}{5-1} = 0,043\%^2$$

Il modello prende in esame solo gli effetti principali dei due fattori, non considerando l'interazione.

La relazione fra l'interazione e il coefficiente β_{12} relativo al prodotto dei due fattori: $x_1 x_2$, risulta (§ 2.3.2):

$$\beta_{12} = \frac{1}{2} E_{12}$$

Il valore dell'interazione può essere determinato come per ogni piano fattoriale (§ 2.3.1.4 e § 2.5.1):

$$E_{12}(\%) = \frac{1}{2} [(+1) \cdot 39,3 + (-1) \cdot 40,9 + (-1) \cdot 40,0 + (+1) \cdot 41,5] = -0,05\%$$

la somma dei quadrati relativa all'interazione è (§ 2.4.1):

$$SS(E_{12}) = 4 \frac{E_{12}^2}{4} = 0,0025\%^2$$

Per verificarne la significatività, si prenda in esame il rapporto:

$$F = \frac{SS(E_{12})}{s^2} = \frac{0,0025}{0,043} = 0,058$$

confrontato con il valore critico della distribuzione F relativo ad un livello di significatività del 10%:

$$F_{90\%,1,4} = 4,55$$

evidenzia la non significatività dell'interazione dei due parametri, confermando l'adeguatezza del modello analitico.

Deve inoltre essere esaminata l'influenza degli effetti quadratici dei due fattori, dai quali dipende lo scostamento della superficie di risposta dalla linearità.

Tale verifica si realizza mediante il confronto di $\bar{y}_f$, la risposta media degli esperimenti inerenti il piano fattoriale 2^2 , rappresentabili nel piano delle variabili codificate (x_1, x_2) dai 4 vertici del quadrato: $(-1, -1)$, $(+1, -1)$, $(-1, +1)$, $(+1, +1)$, con $\bar{y}_c$, la risposta media dei 5 rilevamenti inerenti le condizioni iniziali del processo, rappresentate dal centro del quadrato: $(0, 0)$.

La differenza: $\bar{y}_f - \bar{y}_c$, è una stima della somma dei coefficienti relativi agli effetti quadratici dei parametri, $\beta_{11} + \beta_{22}$:

$$\beta_{11} + \beta_{22} = \bar{y}_f - \bar{y}_c = 40,425\% - 40,46\% = -0,035\%$$

La somma dei quadrati risulta:

$$SS(E_{11} + E_{22}) = \frac{4 \cdot 5 (\bar{y}_f - \bar{y}_c)^2}{4 + 5} = \frac{4 \cdot 5 (-0,035)^2}{4 + 5} = 0,0027$$

4 sono i punti relativi alla parte fattoriale del piano sperimentale e 5 sono le ripetizioni delle condizioni operative intermedie.

A tale somma dei quadrati è associata un solo grado di libertà.

Si consideri il rapporto:

$$F = \frac{SS(E_{11} + E_{22})}{s^2} = \frac{0,0027}{0,043} = 0,063$$

Dal confronto di tale valore con il valore critico:

$$F_{90\%,1,4} = 4,55$$

si ha l'ulteriore conferma della validità del modello lineare.

Si riassumano i valori delle somme dei quadrati corrette inerenti le diverse cause di variazione dei dati della prima fase sperimentale nella tabella dell'ANOVA:

causa di variazione	somma dei quadrati corretta(% ²)	gradi di libertà	media dei quadrati corretta(% ²)	F _{calc}
regressione (β_1, β_2)	2,8250	2	1,4125	32,85
(interazione E_{12})	0,0025	1	0,0025	0,058
($E_{11}+E_{22}$)	0,0027	1	0,0027	0,063
(errore sperimentale)	0,1720	4	0,043	
totale	3,0022	8		

Si impieghi il modello lineare, dato dalla relazione:

$$\hat{y}(\%) = 40,444 + 0,155(\xi_1 - \bar{\xi}_1) + 0,108(\xi_2 - \bar{\xi}_2)$$

$$\hat{y}(\%) = 40,444 + 0,775x_1 + 0,325x_2$$

per muoversi dal punto iniziale (0,0) verso punti del piano delle coordinate codificate (x_1, x_2), nei quali si ottiene una maggiore purezza della sostanza prodotta. Dal modello si osserva che un incremento dei valori di entrambi i parametri porta, nell'intorno delle condizioni originarie del processo, ad un miglioramento del risultato.

In accordo all'espressione del modello lineare ottenuto, ad ogni incremento di 0,775 unità nella direzione dell'asse x_1 deve corrispondere un incremento di 0,325 unità nella direzione dell'asse x_2 : ad ogni incremento unitario $\Delta x_1 = 1$, deve corrispondere un incremento $\Delta x_2 = 0,775/0,325 = 0,42$.

Essendo la relazione fra variabili codificate e variabili reali:

$$x_1 = \frac{\xi_1 - 35}{5} \quad x_2 = \frac{\xi_2 - 68}{3}, \text{ ad uno step di 5 min. del tempo di permanenza}$$

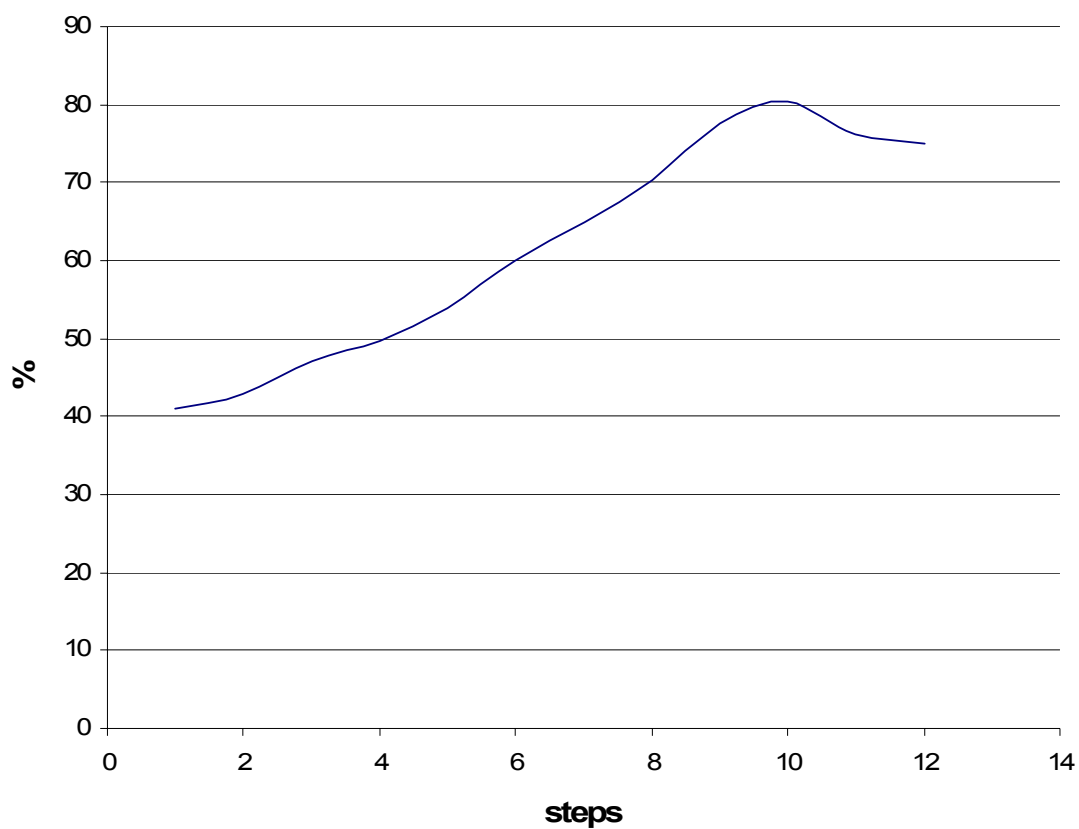
dei reagenti nell'impianto di sintesi, deve corrispondere un incremento della temperatura del processo di $3 \times 0,42 \text{ } ^\circ\text{C} = 1,26^\circ\text{C}$.

Si registri la risposta del sistema in corrispondenza di valori crescenti, ad intervalli regolari di 5 min e $1,26^\circ\text{C}$, ottenendo:

steps	x_1	x_2	$\xi_1(\text{min.})$	$\xi_2(^{\circ}\text{C})$	$y(\%)$
origine	0	0	35	68	
Δ	1	0,42	5	1,26	
origine+ Δ	1	1,16	40	69,26	41
origine+2 Δ	2	2,32	45	70,52	42,9
origine+3 Δ	3	3,48	50	71,78	47,1
origine+4 Δ	4	4,64	55	73,04	49,7
origine+5 Δ	5	5,8	60	74,3	53,8
origine+6 Δ	6	6,96	65	75,56	59,9
origine+7 Δ	7	8,12	70	76,82	65
origine+8 Δ	8	9,28	75	78,08	70,4
origine+9 Δ	9	10,44	80	79,34	77,6
origine+10 Δ	10	11,6	85	80,6	80,3
origine+11 Δ	11	12,76	90	81,86	76,2
origine+12 Δ	12	13,92	95	83,12	75,1

Si rappresenti l'andamento dei valori della purezza ottenuti nei successivi steps:

Andamento della purezza al variare degli steps



Si registrano valori crescenti della risposta del sistema fino al decimo incremento dei valori delle variabili naturali. In corrispondenza dei successivi incrementi, si ha un peggioramento.

E' pertanto necessario ricorrere ad un altro modello lineare in prossimità delle seguenti condizioni del processo: $\xi_1 = 85 \text{ min.}$; $\xi_2 = 80,6^\circ\text{C}$.

Si esamini il comportamento del sistema nel seguente campo di variazione dei parametri:

- ξ_1 : [80 min. ; 90 min.]
- ξ_2 : [79,34°C ; 81,86°C]

Si determini l'espressione di un nuovo modello lineare, adattato ai risultati ottenuti in un nuovo piano sperimentale 2^2 con 5 centri, analogo al precedente.

Le nuove relazioni fra le variabili naturali e quelle codificate sono:

$$x_1 = \frac{\xi_1 - 85}{5} \quad x_2 = \frac{\xi_2 - 80,6}{1,26}$$

I risultati del nuovo esperimento siano:

ξ_1 (min.)	ξ_2 (°C)	x_1	x_2	$y(\%)$
80	79,34	-1	-1	76,5
90	79,34	+1	-1	78
80	81,86	-1	+1	77
90	81,86	+1	+1	79,5
85	80,6	0	0	79,9
85	80,6	0	0	80,3
85	80,6	0	0	80
85	80,6	0	0	79,7
85	80,6	0	0	79,8

In maniera del tutto analoga a quanto fatto precedentemente, impiegando il metodo dei minimi quadrati, si adattano ai dati rilevati l'espressione:

$$y = \beta_0 + \beta_1(\xi_1 - \bar{\xi}_1) + \beta_2(\xi_2 - \bar{\xi}_2) + \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & S_{\xi_1 \xi_1} & S_{\xi_1 \xi_2} \\ 0 & S_{\xi_1 \xi_2} & S_{\xi_2 \xi_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^9 y_i \\ S_{y \xi_1} \\ S_{y \xi_2} \end{bmatrix}$$

I termini che compaiono nell'espressione matriciale sono:

$$S_{\xi_1 \xi_2} = \sum_{i=1}^9 (\xi_{1i} - \bar{\xi}_1)(\xi_{2i} - \bar{\xi}_2) = 0,00 \text{ min } ^\circ\text{C}$$

$$S_{\xi_1 \xi_1} = \sum_{i=1}^9 (\xi_{1i} - \bar{\xi}_1)^2 = 100,00 \text{ min}^2$$

$$S_{\xi_2 \xi_2} = \sum_{i=1}^9 (\xi_{2i} - \bar{\xi}_2)^2 = 6,35 ^\circ\text{C}^2$$

$$S_{\xi_1 y} = \sum_{i=1}^9 y_i (\xi_{1i} - \bar{\xi}_1) = 20,00 \text{ min } \%$$

$$S_{\xi_2 y} = \sum_{i=1}^9 y_i (\xi_{2i} - \bar{\xi}_2) = 2,52 ^\circ\text{C} \%$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 78,97\% \\ \beta_1 &= 0,20 \text{ } \%/ \text{min} \\ \beta_2 &= 0,397\% / ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

L'espressione del modello lineare risulta nelle variabili naturali e codificate:

$$\hat{y}(\%) = 78,97 + 0,20(\xi_1 - \bar{\xi}_1) + 0,397(\xi_2 - \bar{\xi}_2)$$

$$\hat{y}(\%) = 78,97 + 1,00x_1 + 0,50x_2$$

Si esegua l'analisi dell'adeguatezza del modello che si articola, come già affermato nelle seguenti fasi:

1. stima dell'errore sperimentale;
2. analisi dell'adeguatezza del modello in merito all'interazione fra i fattori presi in esame;
3. esame dell'adeguatezza nei riguardi degli effetti quadratici (la curvatura della superficie di risposta).

In base ai risultati relativi ai 5 centri del piano sperimentale si ottiene la stima della varianza:

$$s^2(\%^2) = \frac{(79,9)^2 + (80,3)^2 + (80,0)^2 + (79,7)^2 + (79,8)^2 - \frac{(79,9 + 80,3 + 80,0 + 79,7 + 79,8)^2}{5}}{5-1} = 0,053\%^2$$

Analogamente a quanto fatto precedentemente si determinano i valori delle somme dei quadrati corrette inerenti l'interazione fra i fattori e la curvatura.

Per quanto riguarda l'interazione fra i parametri:

$$E_{12}(\%) = \frac{1}{2}[(+1) \cdot 76,5 + (-1) \cdot 78,0 + (-1) \cdot 77,0 + (+1) \cdot 79,5] = 0,5\%$$

la somma dei quadrati relativa è:

$$SS(E_{12}) = 4 \frac{E_{12}^2}{4} = 0,25\%^2$$

Per verificarne la significatività, si prenda in esame il rapporto:

$$F = \frac{SS(E_{12})}{s^2} = \frac{0,250}{0,053} = 4,72$$

confrontato con il valore critico della distribuzione F relativo ad un livello di significatività del 10%:

$$F_{90\%,1,4} = 4,55$$

evidenzia la relativa significatività dell'interazione dei due parametri.

Si verifichi l'influenza degli effetti quadratici di questi ultimi:

$$\beta_{11} + \beta_{22} = \bar{Y}_f - \bar{Y}_c = 77,75\% - 79,94\% = -2,19\%$$

La somma dei quadrati relativi:

$$SS(E_{11} + E_{22}) = \frac{4 \cdot 5 (\bar{y}_f - \bar{y}_c)^2}{4 + 5} = \frac{4 \cdot 5 (-2,19)^2}{4 + 5} = 10,66$$

Si consideri il rapporto:

$$F = \frac{SS(E_{11} + E_{22})}{s^2} = \frac{10,66}{0,053} = 201,09$$

confrontato con il valore critico della distribuzione F relativo ad un livello di significatività del 10%:

$$F_{90\%,1,4} = 4,55$$

evidenzia la notevole significatività degli effetti quadratici dei due parametri, rilevando l'inadeguatezza del modello lineare.

I risultati sono riassunti nella seguente tabella dell'ANOVA:

causa di variazione	somma dei quadrati corretta(% ²)	gradi di libertà	media dei quadrati corretta(% ²)	F _{calc}
regressione (β ₁ , β ₂)	5,00	2	2,50	47,17
(interazione E ₁₂)	0,25	1	0,25	4,72
(E ₁₁ +E ₂₂)	10,66	1	10,66	201,09
(errore sperimentale)	0,212	4	0,053	
totale	16,12	8		

La rilevanza della curvatura della superficie di risposta del sistema nel campo di variabilità dei parametri, è un chiaro indice del raggiungimento di condizioni molto vicine all'ottimo. Ai fini dell'individuazione della migliore condizione possibile, è necessario un modello analitico del secondo ordine.

§ 4.3 ANALISI DEL SECONDO ORDINE (RIDGE ANALYSIS)

In prossimità delle condizioni ottimali di un processo, per determinare con accuratezza i valori dei parametri per i quali si ottenga il risultato migliore possibile, è necessario il ricorso a modelli analitici del secondo ordine o superiori, che approssimino la reale relazione fra le variabili di influenza e la caratteristica desiderata, tenendo conto della curvatura della superficie di risposta. Nel caso di due variabili, quest'ultima può godere di una visualizzazione geometrica.

Qualora la superficie di risposta sia una quadrica, quale un paraboloide ellittico, in prossimità del colmo non può essere approssimata da un cono, rappresentativo di un modello analitico lineare.

Si riprenda l'esempio precedente. Con il metodo "Steepest ascent" si sono ottenuti rapidamente risultati molto buoni: da un iniziale grado di purezza del 40% , si è ottenuto un valore prossimo all'80%.

Viene ora introdotto un nuovo piano sperimentale: il piano composito centrale, ottenuto aggiungendo alle condizioni relative al 2^2 con 5 centri, 4 altri punti del piano delle variabili codificate x_1 e x_2 :

$$\begin{aligned}(x_1 = 0, x_2 = \pm\sqrt{2}) \\ (x_1 = \pm\sqrt{2}, x_2 = 0).\end{aligned}$$

I risultati di tale particolare piano sono:

$\xi_1(\text{min.})$	$\xi_2(^{\circ}\text{C})$	x_1	x_2	$y(\%)$
80	79,34	-1	-1	76,5
90	79,34	+1	-1	78
80	81,86	-1	1	77
90	81,86	+1	1	79,5
85	80,6	0	0	79,9
85	80,6	0	0	80,3
85	80,6	0	0	80
85	80,6	0	0	79,7
85	80,6	0	0	79,8
92,1	80,6	$+\sqrt{2}$	0	78,4
77,9	80,6	$-\sqrt{2}$	0	75,6
85	82,38	0	$+\sqrt{2}$	78,5
85	78,82	0	$-\sqrt{2}$	77

Si noti che il piano si basa sui risultati conseguiti nel 2^2 con 5 centri, eseguito nella fase precedente.

Ciò è lecito se non sono mutate le condizioni sperimentali inerenti non soltanto i parametri presi in esame, ma anche altre possibili cause di variazione che devono essere mantenute bloccate. Se tra la fase precedente e l'attuale è trascorso poco tempo, si possono impiegare i risultati già ottenuti ai fini dell'elaborazione del modello analitico del secondo ordine.

Si scriva l'espressione di tale modello analitico nella notazione matriciale:

$$\hat{y} = \beta_0 + \vec{x}'\vec{b} + \vec{x}'B\vec{x}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \frac{\beta_{12}}{2} \\ \frac{\beta_{12}}{2} & \beta_{22} \end{bmatrix}$$

Si determinino i coefficienti: β_0 , β_1 , β_2 , β_{12} , β_{11} , β_{22} , con il metodo dei minimi quadrati.

Si consideri la seguente matrice X:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{11}x_{21} & x_{11}^2 & x_{21}^2 \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{12}x_{22} & x_{12}^2 & x_{22}^2 \\ 1 & x_{13} & x_{23} & x_{13}x_{23} & x_{13}^2 & x_{23}^2 \\ 1 & x_{14} & x_{24} & x_{14}x_{24} & x_{14}^2 & x_{24}^2 \\ 1 & x_{15} & x_{25} & x_{15}x_{25} & x_{15}^2 & x_{25}^2 \\ 1 & x_{16} & x_{26} & x_{16}x_{26} & x_{16}^2 & x_{26}^2 \\ 1 & x_{17} & x_{27} & x_{17}x_{27} & x_{17}^2 & x_{27}^2 \\ 1 & x_{18} & x_{28} & x_{18}x_{28} & x_{18}^2 & x_{28}^2 \\ 1 & x_{19} & x_{29} & x_{19}x_{29} & x_{19}^2 & x_{29}^2 \\ 1 & x_{1\ 10} & x_{2\ 10} & x_{1\ 10}x_{2\ 10} & x_{1\ 10}^2 & x_{2\ 10}^2 \\ 1 & x_{1\ 11} & x_{2\ 11} & x_{1\ 11}x_{2\ 11} & x_{1\ 11}^2 & x_{2\ 11}^2 \\ 1 & x_{1\ 12} & x_{2\ 12} & x_{1\ 12}x_{2\ 12} & x_{1\ 12}^2 & x_{2\ 12}^2 \\ 1 & x_{1\ 13} & x_{2\ 13} & x_{1\ 13}x_{2\ 13} & x_{1\ 13}^2 & x_{2\ 13}^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ 1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ 1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 \\ 1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & +\sqrt{2} & 0 & 0 & +2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & +2 & 0 \\ 1 & 0 & +\sqrt{2} & 0 & 0 & +2 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & +2 \end{bmatrix}$$

I termini della matrice sono ottenuti in base ai valori delle variabili codificate (x_1 , x_2) inerenti le 13 prove del piano composito centrato.

I risultati delle prove si esprimono:

$$\vec{y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \end{bmatrix} \quad \vec{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_{12} \\ \beta_{11} \\ \beta_{22} \end{bmatrix} \quad \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \\ \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix}$$

I valori dei coefficienti che minimizzano la somma dei quadrati degli errori si ottengono dalla seguente espressione:

$$\vec{\beta} = (X'X)^{-1} X' \vec{y}$$

Si svolgono i calcoli:

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,20000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & -0,10000 & -0,10000 \\ 0,00000 & 0,12500 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,00000 & 0,00000 & 0,12500 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,25000 & 0,00000 & 0,00000 \\ -0,1000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,14375 & 0,01875 \\ -0,1000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,01875 & 0,14375 \end{bmatrix}$$

$$X'y \rightarrow = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 76,5 \\ 78,0 \\ 77,0 \\ 79,5 \\ 79,9 \\ 80,3 \\ 80,0 \\ 79,7 \\ 79,8 \\ 78,4 \\ 75,6 \\ 78,5 \\ 77,0 \end{bmatrix}$$

$$X'y \rightarrow = \begin{bmatrix} 1020,20 \\ 7,96 \\ 4,12 \\ 1,00 \\ 619,00 \\ 622,00 \end{bmatrix}$$

$$\beta \rightarrow = \begin{bmatrix} 79,940 \\ 0,995 \\ 0,515 \\ 0,250 \\ -1,376 \\ -1,001 \end{bmatrix}$$

Si ottiene l'espressione del modello:

$$\hat{y}(\%) = 79,94 + 0,995x_1 + 0,515x_2 + 0,250x_1x_2 - 1,376x_1^2 - 1,001x_2^2$$

Si analizzi l'adeguatezza del modello mediante il confronto dei valori delle somme dei quadrati corrette inerenti i valori ottenuti dalla regressione, e i dati effettivi:

$$SS(\text{modello}) = \sum_{i=1}^{13} (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2 = 28,25\%^2$$

$$SS(\text{totale}) = \sum_{i=1}^{13} (y_i - \bar{y})^2 = 28,74\%^2$$

La stima della varianza si ha in base ai dati relativi ai centri del piano sperimentale:

$$s^2(\%^2) = \frac{(79,9)^2 + (80,3)^2 + (80,0)^2 + (79,7)^2 + (79,8)^2 - \frac{(79,9 + 80,3 + 80,0 + 79,7 + 79,8)^2}{5}}{5-1} = 0,053\%^2$$

La tabella dell'ANOVA è:

causa di variazione	somma dei quadrati corretta(% ²)	gradi di libertà	media dei quadrati corretta(% ²)	F _{calc}
modello	28,25	5	5,65	106,6
(carenza modello)	0,28	3	0,094	1,77
(errore sperimentale)	0,2120	4	0,053	
totale	28,74	12		

In base al livello di significatività del 10%, si nota che il valore di F_{calc} (carenza del modello) = 1,77 è inferiore al valore critico:

$$F_{90\%,3,4} = 4,19$$

Ne deriva l'adeguatezza del modello analitico ottenuto.

Si può impiegare quest'ultimo per determinare le condizioni ottimali.

Si determinino i valori delle coordinate x₁ ed x₂ per le quali si annulla la derivata prima dell'espressione analitica del modello:

$$\hat{y} = \beta_0 + \vec{x}'\vec{b} + \vec{x}'B\vec{x}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \frac{\beta_{12}}{2} \\ \frac{\beta_{12}}{2} & \beta_{22} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial \vec{x}} = \vec{b} + 2B\vec{x} = 0 \quad \vec{x} = -\frac{1}{2}B^{-1}\vec{b}$$

Essendo:

$$\vec{b} = \begin{vmatrix} 0,995 \\ 0,515 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} -1,376 & 0,125 \\ 0,125 & -1,001 \end{vmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} -0,735 & -0,092 \\ -0,092 & -1,010 \end{vmatrix}$$

$$B^{-1} \vec{b} = \begin{vmatrix} -0,735 & -0,092 \\ -0,092 & -1,010 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,995 \\ 0,515 \end{vmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{vmatrix} 0,389 \\ 0,306 \end{vmatrix}$$

Ai valori delle coordinate codificate determinate corrispondono i seguenti valori dei parametri del processo:

$$\xi_1 = 86' 58'' ; \xi_2 = 80,99^\circ\text{C}.$$

Il relativo valore, previsto dal modello è:

$$\begin{aligned} \hat{y}(\%) &= 79,94 + 0,995 \cdot 0,389 + 0,515 \cdot 0,306 + 0,250 \cdot 0,389 \cdot 0,306 - 1,376 \cdot 0,389^2 - 1,001 \cdot 0,306^2 = \\ &= 80,82\% \end{aligned}$$

§ 4.3.1 ANALISI DELLA SUPERFICIE DI RISPOSTA NELL'INTORNO DEL PUNTO DI DERIVATA NULLA

Il punto in cui si annullano le derivate dell'espressione del modello può non essere un massimo ma solo un punto di stazionarietà della caratteristica d'interesse.

Per analizzare la relazione funzionale fra quest'ultima e i parametri, ci si riferisce ad un sistema di riferimento, avente origine nel punto di derivata nulla, con gli assi coincidenti con quelli principali della superficie di risposta.

Siano w_1, w_2 , le variabili relative al nuovo sistema di riferimento.

L'equazione del modello analitico, approssimante la superficie di risposta è:

$$\hat{y} = \hat{y}_0 + \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2$$

I coefficienti λ_1 e λ_2 sono gli autovalori della matrice B:

$$\det[B - \lambda I] = 0 \quad \det \begin{bmatrix} -1,376 - \lambda & 0,125 \\ 0,125 & -1,001 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-1,376 - \lambda)(-1,001 - \lambda) - 0,125^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 2,377\lambda + 1,362 = 0 \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -1,414 \\ \lambda_2 = -0,963 \end{matrix}$$

L'espressione in forma canonica del modello approssimante, nell'intorno del punto di stazionarietà, la superficie di risposta è: $\hat{y}(\%) = 80,82 - 1,414w_1 - 0,963w_2$

Essendo concorde e negativo il segno dei coefficienti λ_1 e λ_2 , il punto di derivata nulla risulta un punto di massimo e le condizioni del processo corrispondenti sono le condizioni di ottimo.

Il mantenimento nel tempo delle condizioni ottimali può risultare oneroso per il sistema di comando e controllo del processo. Un accurato esame dell'espressione del modello può indicare i campi di variazione ammissibili per i parametri. Si osservi l'opportunità dello scostamento dalle condizioni di ottimo, seguendo la direzione indicata da $w_2 = 0$.

Si ottenga la relazione fra le variabili canoniche w_1, w_2 e quelle codificate x_1 ed x_2 .

La relazione fra i 2 sistemi di riferimento è: $\bar{w} = M'(\bar{x} - \bar{x}_0)$

M è la matrice degli autovettori normalizzati associati agli autovalori: λ_1 e λ_2 .

L'autovettore normalizzato associato a λ_1 è:

$$(B - \lambda_1 I)\vec{m}_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1,376 + 1,414 & 0,125 \\ 0,125 & -1,001 + 1,414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,038m_{11} + 0,125m_{21} \\ 0,125m_{11} + 0,413m_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = -3,303m_{21}$$

$$m_{11}^2 + m_{21}^2 = 1 \quad \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,290 \\ -0,957 \end{bmatrix}$$

mentre l'autovettore associato a λ_2 :

$$(B - \lambda_2 I)\vec{m}_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1,376 + 0,963 & 0,125 \\ 0,125 & -1,001 + 0,963 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0,413m_{12} + 0,125m_{22} \\ 0,125m_{12} - 0,038m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$m_{12} = 0,303m_{22}$$

$$m_{12}^2 + m_{22}^2 = 1 \quad \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,290 \\ 0,957 \end{bmatrix}$$

La matrice degli autovettori è:

$$M = \begin{bmatrix} 0,290 & 0,290 \\ -0,957 & 0,957 \end{bmatrix}$$

La relazione fra i sistemi di coordinate è la seguente:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,290 & -0,957 \\ 0,290 & 0,957 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 0,389 \\ x_2 - 0,306 \end{bmatrix}$$

La direzione secondo la quale si ha: $w_2 = 0$, è indicata dalla seguente relazione fra le coordinate codificate: $0,290(x_1 - 0,389) + 0,957(x_2 - 0,306) = 0$

§ 4.4 REQUISITI DEI PIANI SPERIMENTALI PER LA DETERMINAZIONE DEI MODELLI ANALITICI RAPPRESENTATIVI DELLA SUPERFICIE DI RISPOSTA DI UN SISTEMA

Un piano sperimentale da impiegare in una procedura RSM deve:

1. procurare una razionale distribuzione di dati in tutto il campo di variazione dei parametri, in corrispondenza del quale si deve esaminare il comportamento del sistema;
2. consentire un'accurata analisi dell'adeguatezza del modello;
3. dare la possibilità di potersi basare sui risultati di piani precedentemente eseguiti, relativi ad analisi di ordine inferiore;
4. procurare una stima dell'errore sperimentale;
5. non richiedere un numero eccessivo di prove;
6. richiedere il minimo numero possibile di livelli per i parametri;
7. assicurare semplicità di calcolo dei coefficienti del modello.

Per quanto riguarda i piani sperimentali del primo ordine, da impiegare nella prima fase (steepest ascent), sono da preferire i piani fattoriali a due livelli arricchiti di un determinato numero di centri (ripetizioni delle condizioni iniziali del processo). Sulla base dei dati relativi a questi ultimi si ottiene una stima dell'errore sperimentale.

In base a quest'ultima si può rapidamente eseguire una rapida analisi dell'adeguatezza del modello, con un'ANOVA.

Per l'analisi del secondo ordine sono da prediligere i piani fattoriali a due livelli del tipo composito centrato rispetto ai piani caratterizzati da 3 livelli.

Il motivo non risiede solo sulla maggiore semplicità di esecuzione dei primi piani, e sulla possibilità di impiego dei dati rilevati nella fase steepest ascent, ma soprattutto sulla rotabilità.

Quest'ultima indica la proprietà di un piano sperimentale di fornire una distribuzione di dati, tale che l'errore connesso al valore di previsione $y^{\wedge}$ ottenuto dal modello analitico, elaborato con il metodo dei minimi quadrati, dipenda solo dalla distanza dal punto centrale dell'esperimento, e non dalla direzione. Il modello adattato ai dati di un piano sperimentale rotabile è ugualmente preciso in tutte le direzioni.

Tale caratteristica è fondamentale per un procedimento RSM, finalizzato alla localizzazione delle condizioni ottimali di un sistema che sono a priori del tutto ignote.

Un piano fattoriale 3^k non è rotabile.

Un piano composito centrale, è un piano fattoriale a due livelli con centri, con l'aggiunta di $2k$ punti assiali: $(\pm\alpha, 0, \dots, 0)$, $(0, \pm\alpha, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, 0, \dots, \pm\alpha)$.

Dalla scelta di α dipende la rotabilità del piano.

Il valore di α da scegliere ai fini della rotabilità dipende dal numero di punti rappresentativi della porzione fattoriale del piano sperimentale: $\alpha = (n_f)^{1/4}$.

§ 4.5 OTTIMIZZAZIONE COMBINATA DEL VALOR MEDIO E DELLA VARIANZA DELLA RISPOSTA DEL PROCESSO

Qualora si abbia il duplice obiettivo:

- conseguimento della migliore risposta possibile;
- conferimento, nei riguardi delle cause non gestibili, di una robustezza tale da contenere entro limiti assegnati la variabilità della grandezza di interesse,

si elabora un piano sperimentale che fornisca i dati necessari per l'elaborazione di due modelli analitici: $\hat{\mu} = \beta_0 + \bar{x}'\vec{b} + \bar{x}'B\bar{x}$

$$\hat{\sigma} = \gamma_0 + \bar{x}'\vec{c} + \bar{x}'C\bar{x}$$

Il primo modello è inerente il valor medio e il secondo riguarda la deviazione standard dell'output del processo.

Si prenda in esame un'applicazione tipografica in cui un processo di stampa è condizionato dai seguenti fattori:

x_1 : velocità di avanzamento della carta;

x_2 : pressione con cui l'inchiostro è applicato;

x_3 : distanza fra gli elementi di carta in lavorazione.

La caratteristica di interesse è la lunghezza complessiva di carta stampata in maniera corretta, destinata ad un reparto di confezionamento.

Il piano sperimentale adottato è un fattoriale 3^3 con 3 ripetizioni per ogni combinazione di livello dei parametri.

Si riportino i risultati:

u	x_1	x_2	x_3	y_{u1}	y_{u2}	y_{u3}	$\bar{y}_u$	s_u
1	-1	-1	-1	34	10	28	24.0	12.5
2	0	-1	-1	115	116	130	120.3	8.4
3	1	-1	-1	192	186	263	213.7	42.8
4	-1	0	-1	82	88	88	86.0	3.7
5	0	0	-1	44	178	188	136.7	80.4
6	1	0	-1	322	350	350	340.7	16.2
7	-1	1	-1	141	110	86	112.3	27.6
8	0	1	-1	259	251	259	256.3	4.6
9	1	1	-1	290	280	245	271.7	23.6
10	-1	-1	0	81	81	81	81.0	0.0
11	0	-1	0	90	122	93	101.7	17.7
12	1	-1	0	319	376	376	357.0	32.9
13	-1	0	0	180	180	154	171.3	15.0
14	0	0	0	372	372	372	372.0	0.0
15	1	0	0	541	568	396	501.7	92.5
16	-1	1	0	288	192	312	264.0	63.5
17	0	1	0	432	336	513	427.0	88.6
18	1	1	0	713	725	754	730.7	21.1
19	-1	-1	1	364	99	199	220.7	133.8
20	0	-1	1	232	221	266	239.7	23.5
21	1	-1	1	408	415	443	422.0	18.5
22	-1	0	1	182	233	182	199.0	29.4
23	0	0	1	507	515	434	485.3	44.6
24	1	0	1	846	535	640	673.7	158.2
25	-1	1	1	236	126	168	176.7	55.5
26	0	1	1	660	440	403	501.0	138.9
27	1	1	1	878	991	1161	1010.0	142.5

Per quanto detto nel precedente paragrafo il piano sperimentale adottato ha il grave difetto di non essere rotabile. Inoltre 3 sole ripetizioni per ogni condizione sperimentale consentono una stima grossolana della deviazione standard.

Si decide di illustrare comunque l'applicazione in quanto è stata ampiamente discussa in numerosi articoli del Journal of Quality Technology dal 1990 al 2003.

Si determinino le espressioni dei due modelli analitici:

$$\hat{\mu} = \beta_0 + \bar{x}'\vec{b} + \bar{x}'B\bar{x}$$

$$\hat{\sigma} = \gamma_0 + \bar{x}'\vec{c} + \bar{x}'C\bar{x}$$

I termini delle due espressioni matriciali sono i seguenti:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \frac{\beta_{12}}{2} & \frac{\beta_{13}}{2} \\ \frac{\beta_{21}}{2} & \beta_{22} & \frac{\beta_{23}}{2} \\ \frac{\beta_{31}}{2} & \frac{\beta_{32}}{2} & \beta_{33} \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{21}}{2} & \gamma_{22} & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{31}}{2} & \frac{\gamma_{32}}{2} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

Si determinino i coefficienti $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{23}, \beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}$

$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}$, con il

metodo dei minimi quadrati.

Si prenda in esame la matrice X:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix}
1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{11}x_{21} & x_{11}x_{31} & x_{21}x_{31} & x_{11}^2 & x_{21}^2 & x_{31}^2 \\
1 & x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{12}x_{22} & x_{12}x_{32} & x_{22}x_{32} & x_{12}^2 & x_{22}^2 & x_{32}^2 \\
1 & x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{13}x_{23} & x_{13}x_{33} & x_{23}x_{33} & x_{13}^2 & x_{23}^2 & x_{33}^2 \\
1 & x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{14}x_{24} & x_{14}x_{34} & x_{24}x_{34} & x_{14}^2 & x_{24}^2 & x_{34}^2 \\
1 & x_{15} & x_{25} & x_{35} & x_{15}x_{25} & x_{15}x_{35} & x_{25}x_{35} & x_{15}^2 & x_{25}^2 & x_{35}^2 \\
1 & x_{16} & x_{26} & x_{36} & x_{16}x_{26} & x_{16}x_{36} & x_{26}x_{36} & x_{16}^2 & x_{26}^2 & x_{36}^2 \\
1 & x_{17} & x_{27} & x_{37} & x_{17}x_{27} & x_{17}x_{37} & x_{27}x_{37} & x_{17}^2 & x_{27}^2 & x_{37}^2 \\
1 & x_{18} & x_{28} & x_{38} & x_{18}x_{28} & x_{18}x_{38} & x_{28}x_{38} & x_{18}^2 & x_{28}^2 & x_{38}^2 \\
1 & x_{19} & x_{29} & x_{39} & x_{19}x_{29} & x_{19}x_{39} & x_{29}x_{39} & x_{19}^2 & x_{29}^2 & x_{39}^2 \\
1 & x_{1\ 10} & x_{2\ 10} & x_{3\ 10} & x_{1\ 10}x_{2\ 10} & x_{1\ 10}x_{3\ 10} & x_{2\ 10}x_{3\ 10} & x_{1\ 10}^2 & x_{2\ 10}^2 & x_{3\ 10}^2 \\
1 & x_{1\ 11} & x_{2\ 11} & x_{3\ 11} & x_{1\ 11}x_{2\ 11} & x_{1\ 11}x_{3\ 11} & x_{2\ 11}x_{3\ 11} & x_{1\ 11}^2 & x_{2\ 11}^2 & x_{3\ 11}^2 \\
1 & x_{1\ 12} & x_{2\ 12} & x_{3\ 12} & x_{1\ 12}x_{2\ 12} & x_{1\ 12}x_{3\ 12} & x_{2\ 12}x_{3\ 12} & x_{1\ 12}^2 & x_{2\ 12}^2 & x_{3\ 12}^2 \\
1 & x_{1\ 13} & x_{2\ 13} & x_{3\ 13} & x_{1\ 13}x_{2\ 13} & x_{1\ 13}x_{3\ 13} & x_{2\ 13}x_{3\ 13} & x_{1\ 13}^2 & x_{2\ 13}^2 & x_{3\ 13}^2 \\
1 & x_{1\ 14} & x_{2\ 14} & x_{3\ 14} & x_{1\ 14}x_{2\ 14} & x_{1\ 14}x_{3\ 14} & x_{2\ 14}x_{3\ 14} & x_{1\ 14}^2 & x_{2\ 14}^2 & x_{3\ 14}^2 \\
1 & x_{1\ 15} & x_{2\ 15} & x_{3\ 15} & x_{1\ 15}x_{2\ 15} & x_{1\ 15}x_{3\ 15} & x_{2\ 15}x_{3\ 15} & x_{1\ 15}^2 & x_{2\ 15}^2 & x_{3\ 15}^2 \\
1 & x_{1\ 16} & x_{2\ 16} & x_{3\ 16} & x_{1\ 16}x_{2\ 16} & x_{1\ 16}x_{3\ 16} & x_{2\ 16}x_{3\ 16} & x_{1\ 16}^2 & x_{2\ 16}^2 & x_{3\ 16}^2 \\
1 & x_{1\ 17} & x_{2\ 17} & x_{3\ 17} & x_{1\ 17}x_{2\ 17} & x_{1\ 17}x_{3\ 17} & x_{2\ 17}x_{3\ 17} & x_{1\ 17}^2 & x_{2\ 17}^2 & x_{3\ 17}^2 \\
1 & x_{1\ 18} & x_{2\ 18} & x_{3\ 18} & x_{1\ 18}x_{2\ 18} & x_{1\ 18}x_{3\ 18} & x_{2\ 18}x_{3\ 18} & x_{1\ 18}^2 & x_{2\ 18}^2 & x_{3\ 18}^2 \\
1 & x_{1\ 19} & x_{2\ 19} & x_{3\ 19} & x_{1\ 19}x_{2\ 19} & x_{1\ 19}x_{3\ 19} & x_{2\ 19}x_{3\ 19} & x_{1\ 19}^2 & x_{2\ 19}^2 & x_{3\ 19}^2 \\
1 & x_{1\ 20} & x_{2\ 20} & x_{3\ 20} & x_{1\ 20}x_{2\ 20} & x_{1\ 20}x_{3\ 20} & x_{2\ 20}x_{3\ 20} & x_{1\ 20}^2 & x_{2\ 20}^2 & x_{3\ 20}^2 \\
1 & x_{1\ 21} & x_{2\ 21} & x_{3\ 21} & x_{1\ 21}x_{2\ 21} & x_{1\ 21}x_{3\ 21} & x_{2\ 21}x_{3\ 21} & x_{1\ 21}^2 & x_{2\ 21}^2 & x_{3\ 21}^2 \\
1 & x_{1\ 22} & x_{2\ 22} & x_{3\ 22} & x_{1\ 22}x_{2\ 22} & x_{1\ 22}x_{3\ 22} & x_{2\ 22}x_{3\ 22} & x_{1\ 22}^2 & x_{2\ 22}^2 & x_{3\ 22}^2 \\
1 & x_{1\ 23} & x_{2\ 23} & x_{3\ 23} & x_{1\ 23}x_{2\ 23} & x_{1\ 23}x_{3\ 23} & x_{2\ 23}x_{3\ 23} & x_{1\ 23}^2 & x_{2\ 23}^2 & x_{3\ 23}^2 \\
1 & x_{1\ 24} & x_{2\ 24} & x_{3\ 24} & x_{1\ 24}x_{2\ 24} & x_{1\ 24}x_{3\ 24} & x_{2\ 24}x_{3\ 24} & x_{1\ 24}^2 & x_{2\ 24}^2 & x_{3\ 24}^2 \\
1 & x_{1\ 25} & x_{2\ 25} & x_{3\ 25} & x_{1\ 25}x_{2\ 25} & x_{1\ 25}x_{3\ 25} & x_{2\ 25}x_{3\ 25} & x_{1\ 25}^2 & x_{2\ 25}^2 & x_{3\ 25}^2 \\
1 & x_{1\ 26} & x_{2\ 26} & x_{3\ 26} & x_{1\ 26}x_{2\ 26} & x_{1\ 26}x_{3\ 26} & x_{2\ 26}x_{3\ 26} & x_{1\ 26}^2 & x_{2\ 26}^2 & x_{3\ 26}^2 \\
1 & x_{1\ 27} & x_{2\ 27} & x_{3\ 27} & x_{1\ 27}x_{2\ 27} & x_{1\ 27}x_{3\ 27} & x_{2\ 27}x_{3\ 27} & x_{1\ 27}^2 & x_{2\ 27}^2 & x_{3\ 27}^2
\end{bmatrix} =$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

I termini della matrice sono ottenuti in base alle 27 combinazioni delle variabili codificate (x_1 , x_2 , x_3).

I risultati inerenti il valor medio e la deviazione media standard calcolati in corrispondenza di ogni condizione sperimentale si esprimono:

$$[\bar{\mu} \quad \bar{\sigma}] = X[\bar{\beta} \quad \bar{\gamma}] + [\bar{\varepsilon}_\mu \quad \bar{\varepsilon}_\sigma]$$

$$[\bar{\beta} \quad \bar{\gamma}] = \begin{bmatrix} \beta_0 & \gamma_0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \\ \beta_{12} & \gamma_{12} \\ \beta_{13} & \gamma_{13} \\ \beta_{23} & \gamma_{23} \\ \beta_{11} & \gamma_{11} \\ \beta_{22} & \gamma_{22} \\ \beta_{33} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

$$[\vec{\mu} \quad \vec{\sigma}] = \begin{bmatrix} \mu_1 & \sigma_1 \\ \mu_2 & \sigma_2 \\ \mu_3 & \sigma_3 \\ \mu_4 & \sigma_4 \\ \mu_5 & \sigma_5 \\ \mu_6 & \sigma_6 \\ \mu_7 & \sigma_7 \\ \mu_8 & \sigma_8 \\ \mu_9 & \sigma_9 \\ \mu_{10} & \sigma_{10} \\ \mu_{11} & \sigma_{11} \\ \mu_{12} & \sigma_{12} \\ \mu_{13} & \sigma_{13} \\ \mu_{14} & \sigma_{14} \\ \mu_{15} & \sigma_{15} \\ \mu_{16} & \sigma_{16} \\ \mu_{17} & \sigma_{17} \\ \mu_{18} & \sigma_{18} \\ \mu_{19} & \sigma_{19} \\ \mu_{20} & \sigma_{20} \\ \mu_{21} & \sigma_{21} \\ \mu_{22} & \sigma_{22} \\ \mu_{23} & \sigma_{23} \\ \mu_{24} & \sigma_{24} \\ \mu_{25} & \sigma_{25} \\ \mu_{26} & \sigma_{26} \\ \mu_{27} & \sigma_{27} \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} 24 & 12,5 \\ 120,3 & 8,4 \\ 213,7 & 42,8 \\ 86 & 3,7 \\ 136,7 & 80,4 \\ 340,7 & 16,2 \\ 112,3 & 27,6 \\ 256,3 & 4,6 \\ 271,7 & 23,6 \\ 81 & 0 \\ 101,7 & 17,7 \\ 357 & 32,9 \\ 171,3 & 15 \\ 372 & 0 \\ 501,7 & 92,5 \\ 264 & 63,5 \\ 427 & 88,6 \\ 730,7 & 21,1 \\ 220,7 & 133,8 \\ 239,7 & 23,5 \\ 422 & 18,5 \\ 199 & 29,4 \\ 485,3 & 44,6 \\ 673,7 & 158,2 \\ 176,7 & 55,5 \\ 501 & 138,9 \\ 1010 & 142,5 \end{array}$$

La matrice dei coefficienti che minimizza la somma dei quadrati degli errori si ottiene dalla relazione:

$$[\vec{\beta} \quad \vec{\gamma}] = (X'X)^{-1} X'[\vec{\mu} \quad \vec{\sigma}]$$

Si svolga la risoluzione:

$$X'X = \begin{vmatrix} 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 18 & 18 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 12 & 12 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 18 & 12 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & 18 \end{vmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{vmatrix} 0,259 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,11 & -0,11 & -0,11 \\ 0 & 0,056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,083 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,083 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,083 & 0 & 0 & 0 \\ -0,11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,167 & 0 & 0 \\ -0,11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,167 & 0 \\ -0,11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,167 \end{vmatrix}$$

$$X'[\vec{\mu} \quad \vec{\sigma}] = \begin{vmatrix} 8496,2 & 1296 \\ 3186,2 & 207,3 \\ 1969,6 & 275,8 \\ 2366,4 & 525,1 \\ 792,4 & 92,7 \\ 905,5 & 61,7 \\ 523 & 169 \\ 5856,2 & 889,3 \\ 5529,8 & 856 \\ 5489,8 & 964,7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{\beta} & \vec{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 327,6296 & 34,88889 \\ 177,0111 & 11,51667 \\ 109,4222 & 15,32222 \\ 131,4667 & 29,17222 \\ 66,03333 & 7,725 \\ 75,45833 & 5,141667 \\ 43,58333 & 14,08333 \\ 32,01111 & 4,216667 \\ -22,3889 & -1,33333 \\ -29,0556 & 16,78333 \end{vmatrix}$$

Le espressioni delle due superfici di risposta sono le seguenti:

$$\hat{\mu}(\bar{x}) = 327,6 + 177,01x_1 + 109,42x_2 + 131,47x_3 + 66,03x_1x_2 + 75,46x_1x_3 + \\ + 43,58x_2x_3 + 32,01x_1^2 - 22,39x_2^2 - 29,06x_3^2$$

$$\hat{\sigma}(\bar{x}) = 34,9 + 11,52x_1 + 15,32x_2 + 29,17x_3 + 7,73x_1x_2 + 5,14x_1x_3 + \\ + 14,08x_2x_3 + 4,22x_1^2 - 1,33x_2^2 + 16,78x_3^2$$

Si esegua l'analisi della validità dei modelli.

Una stima dell'errore sperimentale si ha in base al valor medio delle varianze inerenti le 27 condizioni di prova:

$$s^2 = 4520.$$

Il grado di libertà associato a quest'ultima, essendo pari a 2 quello relativo alla stima della varianza relativa ad ogni combinazione dei parametri, risulta: 54.

Le somme dei quadrati dei valori ottenuti in base ai modelli e ai dati reali sono:

$$SS(\hat{\mu}) = \sum_{i=1}^{27} \hat{\mu}_i^2 = 3921815$$

$$SS(\hat{\sigma}) = \sum_{i=1}^{27} \hat{\sigma}_i^2 = 89360$$

$$SS(totale) = \sum_{i=1}^{27} \mu_i^2 = 4020289$$

$$SS(\sigma) = \sum_{i=1}^{27} \sigma_i^2 = 122000$$

Le tabelle dell'ANOVA sono:

ANOVA dei valor medi μ_i				
causa di variazione	somma dei quadrati	gradi di libertà	media dei quadrati	F_{calc}
modello	3921815	9	435757	96,40
carenza del modello	98474	17	5793	1,28
(errore sperimentale)	244080	54	4520	

ANOVA delle deviazioni standard σ_i				
causa di variazione	somma dei quadrati	gradi di libertà	media dei quadrati	F_{calc}
modello	89360	9	9929	2,20
carenza del modello	32640	17	1920	0,42

Confrontando i valori degli F_{calc} con il valore critico: $F_{90\%, 17, 54} = 1,75$, non si hanno evidenze di inadeguatezza dei modelli.

Una critica può essere mossa nei riguardi della modalità con cui è stata eseguita la stima dell'errore sperimentale. In base al tipo di piano adottato, si è avuto a disposizione un gran numero complessivo di ripetizioni di prova, relative però a diverse condizioni sperimentali che influenzano in maniera significativa la varianza.

Si determinino le condizioni ottimali nei riguardi del valor medio e della varianza del sistema.

Si ottengano i valori delle variabili codificate x_1 , x_2 ed x_3 per le quali si annullino le derivate prime delle espressioni dei modelli:

$$\hat{\mu} = \beta_0 + \bar{x}'\vec{b} + \bar{x}'B\bar{x}$$

$$\hat{\sigma} = \gamma_0 + \bar{x}'\vec{c} + \bar{x}'C\bar{x}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \frac{\beta_{12}}{2} & \frac{\beta_{13}}{2} \\ \frac{\beta_{21}}{2} & \beta_{22} & \frac{\beta_{23}}{2} \\ \frac{\beta_{31}}{2} & \frac{\beta_{32}}{2} & \beta_{33} \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{21}}{2} & \gamma_{22} & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{31}}{2} & \frac{\gamma_{32}}{2} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \bar{x}} = \vec{b} + 2B\bar{x}_{\mu} = 0 \quad \bar{x}_{\mu} = -\frac{1}{2}B^{-1}\vec{b}$$

$$\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \bar{x}} = \vec{c} + 2C\bar{x}_{\sigma} = 0 \quad \bar{x}_{\sigma} = -\frac{1}{2}C^{-1}\vec{c}$$

Svolgendo le espressioni:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 177,0111 \\ 109,4222 \\ 131,4667 \end{bmatrix} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 11,51667 \\ 15,32222 \\ 29,17222 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 32,01111 & 33,01667 & 37,729167 \\ 33,01667 & -22,3889 & 21,79167 \\ 37,72917 & 21,79167 & -29,05556 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 4,216667 & 3,8625 & 2,570833 \\ 3,8625 & -1,33333 & 7,04167 \\ 2,570833 & 7,041667 & 16,7833 \end{vmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} 0,001423 & 0,01443 & 0,01267 \\ 0,01443 & -0,01906 & 0,00444 \\ 0,01267 & 0,00444 & -0,014635 \end{vmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{vmatrix} 0,177609 & 0,115315 & -0,075588 \\ 0,115315 & -0,15835 & 0,048775 \\ -0,07559 & 0,048775 & 0,050697 \end{vmatrix}$$

$$B^{-1} \mathbf{b}^{\rightarrow} = \begin{vmatrix} 0,001423 & 0,01443 & 0,01267 \\ 0,01443 & -0,01906 & 0,00444 \\ 0,01267 & 0,00444 & -0,014635 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 177,0111 \\ 109,4222 \\ 131,4667 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mu}^{\rightarrow} = \begin{vmatrix} -1,748 \\ -0,526 \\ -0,402 \end{vmatrix}$$

$$C^{-1} \mathbf{c}^{\rightarrow} = \begin{vmatrix} 0,177609 & 0,115315 & -0,075588 \\ 0,115315 & -0,15835 & 0,048775 \\ -0,07559 & 0,048775 & 0,050697 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 11,51667 \\ 15,32222 \\ 29,17222 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\sigma}^{\rightarrow} = \begin{vmatrix} -0,804 \\ -0,162 \\ -0,678 \end{vmatrix}$$

I valori corrispondenti previsti dai modelli risultano:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(\bar{x}_{\mu}) &= 327,6 + 177,01 \cdot (-1,748) + 109,42 \cdot (-0,526) + 131,47 \cdot (-0,402) + \\ &+ 66,03 \cdot (-1,748) \cdot (-0,526) + 75,46 \cdot (-1,748) \cdot (-0,402) + \\ &+ 43,58 \cdot (-0,526) \cdot (-0,402) + 32,01 \cdot (-1,748)^2 + \\ &- 22,39 \cdot (-0,526)^2 - 29,06 \cdot (-0,402)^2 = 117,70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\bar{x}_{\sigma}) &= 34,9 + 11,52 \cdot (-0,804) + 15,32 \cdot (-0,162) + 29,17 \cdot (-0,678) + \\ &+ 7,73 \cdot (-0,804) \cdot (-0,162) + 5,14 \cdot (-0,804) \cdot (-0,678) + \\ &+ 14,08 \cdot (-0,162) \cdot (-0,678) + 4,22 \cdot (-0,804)^2 + \\ &- 1,33 \cdot (-0,162)^2 + 16,78 \cdot (-0,678)^2 = 19,13 \end{aligned}$$

§ 4.5.1 ANALISI DELLE SUPERFICI DI RISPOSTA NEGLI INTORNI DEI PUNTI DI DERIVATA NULLA

Si sono individuati le coordinate codificate in corrispondenza delle quali si ha stazionarietà delle due superfici di risposta esaminate.

Si prendano in esame due sistemi di riferimento aventi origine nei punti di derivata nulla con gli assi coincidenti con quelli principali delle due superfici. Le equazioni dei modelli analitici osculatori di queste ultime sono:

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_0 + \lambda_{1\mu} w_{1\mu}^2 + \lambda_{2\mu} w_{2\mu}^2 + \lambda_{3\mu} w_{3\mu}^2$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_0 + \lambda_{1\sigma} w_{1\sigma}^2 + \lambda_{2\sigma} w_{2\sigma}^2 + \lambda_{3\sigma} w_{3\sigma}^2$$

Si calcolino i coefficienti $\lambda_{1\mu}, \lambda_{2\mu}, \lambda_{3\mu}$, autovalori della matrice B e $\lambda_{1\sigma}, \lambda_{2\sigma}, \lambda_{3\sigma}$, autovalori della matrice C:

$$\det[B - \lambda_{\mu} I] = 0 \quad \det \begin{bmatrix} 32,01 - \lambda_{\mu} & 33,02 & 37,73 \\ 33,02 & -22,39 - \lambda_{\mu} & 21,79 \\ 37,73 & 21,79 & -29,06 - \lambda_{\mu} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\mu 1} &= 67,2008215547326 \\ \lambda_{\mu 2} &= -37,0543249671615 \\ \lambda_{\mu 3} &= -49,579829920905 \end{aligned}$$

$$\det[C - \lambda_{\sigma} I] = 0 \quad \det \begin{bmatrix} 4,2167 - \lambda_{\sigma} & 3,863 & 2,571 \\ 3,863 & -1,333 - \lambda_{\sigma} & 7,042 \\ 2,571 & 7,042 & 16,783 - \lambda_{\sigma} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\sigma 1} &= 4,2941417616614 \\ \lambda_{\sigma 2} &= 20,07310503508 \\ \lambda_{\sigma 3} &= -4,7005801300729 \end{aligned}$$

Considerati i segni non concordi delle due terne degli autovalori, si deduce che i punti trovati non rappresentano né condizioni di minimo né condizioni di massimo.

Ciononostante le equazioni nelle coordinate canoniche offrono le indicazioni per l'ottimizzazione.

Ai fini della massimizzazione del valor medio, è necessario portarsi dalla condizione di stazionarietà nella direzione indicata da:

$$w_{\mu 2} = 0$$

$$w_{\mu 3} = 0$$

Ai fini di un sempre maggiore contenimento della varianza è opportuno portarsi in punti per i quali si abbia:

$$w_{\sigma 1} = 0$$

$$w_{\sigma 2} = 0$$

Le relazioni fra le variabili canoniche $(w_{\mu 1}, w_{\mu 2}, w_{\mu 3})$, $(w_{\sigma 1}, w_{\sigma 2}, w_{\sigma 3})$ e le variabili codificate (x_1, x_2, x_3) sono rappresentate dalle equazioni:

$$\bar{w}_{\mu} = M_{\mu}'(\bar{x} - \bar{x}_{\mu}) \quad \bar{w}_{\sigma} = M_{\sigma}'(\bar{x} - \bar{x}_{\sigma})$$

Si determinino le matrici degli autovettori normalizzati: M_{μ} e M_{σ} .

L'autovettore normalizzato associato a $\lambda_{\mu 1}$ risulta:

$$(B - \lambda_{\mu 1} I) \vec{m}_{\mu 1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 32,01 - 67,20 & 33,02 & 37,73 \\ 33,02 & -22,39 - 67,20 & 21,79 \\ 37,73 & 21,79 & -29,06 - 67,20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{\mu 11} \\ m_{\mu 21} \\ m_{\mu 31} \end{bmatrix} = 0$$

$$(32,01 - 67,20)m_{\mu 11} + 33,02 m_{\mu 21} + 37,73 m_{\mu 31} = 0$$

$$33,02 m_{\mu 11} - (22,39 + 67,20) m_{\mu 21} + 21,79 m_{\mu 31} = 0$$

$$m_{\mu 11}^2 + m_{\mu 21}^2 + m_{\mu 31}^2 = 1 \quad \vec{m}_{\mu 1} = \begin{bmatrix} 0,562 \\ 0,578 \\ 0,592 \end{bmatrix}$$

L'autovettore associato a $\lambda_{\mu 2}$ risulta:

$$(B - \lambda_{\mu 2} I) \vec{m}_{\mu 2} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 32,01 + 37,05 & 33,02 & 37,73 \\ 33,02 & -22,39 + 37,05 & 21,79 \\ 37,73 & 21,79 & -29,06 + 37,05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{\mu 12} \\ m_{\mu 22} \\ m_{\mu 32} \end{bmatrix} = 0$$

$$(32,01 + 37,05)m_{\mu 12} + 33,02 m_{\mu 22} + 37,73 m_{\mu 32} = 0$$

$$33,02 m_{\mu 12} - (22,39 + 37,05) m_{\mu 22} + 21,79 m_{\mu 32} = 0$$

$$m_{\mu 12}^2 + m_{\mu 22}^2 + m_{\mu 32}^2 = 1 \quad \vec{m}_{\mu 2} = \begin{bmatrix} -0,037 \\ 0,958 \\ 0,285 \end{bmatrix}$$

L'autovettore inerente $\lambda_{\mu 3}$ è:

$$(B - \lambda_{\mu 3} I) \vec{m}_{\mu 3} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 32,01 + 49,58 & 33,02 & 37,73 \\ 33,02 & -22,39 + 49,58 & 21,79 \\ 37,73 & 21,79 & -29,06 + 49,58 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{\mu 13} \\ m_{\mu 23} \\ m_{\mu 33} \end{bmatrix} = 0$$

$$(32,01 + 49,58)m_{\mu 13} + 33,02 m_{\mu 23} + 37,73 m_{\mu 33} = 0$$

$$33,02 m_{\mu 13} - (22,39 + 49,58) m_{\mu 23} + 21,79 m_{\mu 33} = 0$$

$$m_{\mu 13}^2 + m_{\mu 23}^2 + m_{\mu 33}^2 = 1 \quad \vec{m}_{\mu 3} = \begin{bmatrix} 0,504 \\ -0,369 \\ 0,781 \end{bmatrix}$$

La matrice degli autovettori M_{μ} è:

$$M_{\mu} = \begin{bmatrix} 0,562 & -0,037 & 0,504 \\ 0,578 & 0,958 & -0,369 \\ 0,592 & 0,285 & 0,781 \end{bmatrix}$$

Il sistema di equazioni relativo al cambiamento del sistema di riferimento è il seguente:

$$\vec{w}_{\mu} = M_{\mu}' (\vec{x} - \vec{x}_{\mu})$$

$$\begin{bmatrix} w_{\mu 1} \\ w_{\mu 2} \\ w_{\mu 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,562 & 0,578 & 0,592 \\ -0,037 & 0,958 & 0,285 \\ 0,504 & -0,369 & 0,781 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 + 1,748 \\ x_2 + 0,526 \\ x_3 + 0,402 \end{bmatrix}$$

Le condizioni per le quali si ha la massimizzazione della risposta sono dettate dalle seguenti relazioni:

$$w_{\mu 2} = 0 \quad -0,037(x_1 + 1,748) + 0,958(x_2 + 0,526) + 0,285(x_3 + 0,402) = 0$$

$$w_{\mu 3} = 0 \quad 0,504(x_1 + 1,748) - 0,369(x_2 + 0,526) + 0,781(x_3 + 0,402) = 0$$

Si determini ora la matrice $M\sigma$.

L'autovettore normalizzato associato a $\lambda_{\sigma 1}$ è:

$$(C - \lambda_{\sigma 1} I) \vec{m}_{\sigma 1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4,22 - 4,29 & 3,86 & 2,57 \\ 3,86 & -1,33 - 4,29 & 7,04 \\ 2,57 & 7,04 & 16,78 - 4,29 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{\sigma 11} \\ m_{\sigma 21} \\ m_{\sigma 31} \end{bmatrix} = 0$$

$$(4,22 - 4,29)m_{\sigma 11} + 3,86 m_{\sigma 21} + 2,57 m_{\sigma 31} = 0$$

$$3,86 m_{\sigma 11} - (1,33 + 4,29) m_{\sigma 21} + 7,04 m_{\sigma 31} = 0$$

$$m_{\sigma 11}^2 + m_{\sigma 21}^2 + m_{\sigma 31}^2 = 1 \quad \vec{m}_{\sigma 1} = \begin{bmatrix} 0,9998 \\ -0,0128 \\ 0,0176 \end{bmatrix}$$

L'autovettore inerente $\lambda_{\sigma 2}$ è:

$$(C - \lambda_{\sigma 2} I) \vec{m}_{\sigma 2} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4,22 - 20,07 & 3,86 & 2,57 \\ 3,86 & -1,33 - 20,07 & 7,04 \\ 2,57 & 7,04 & 16,78 - 20,07 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{\sigma 12} \\ m_{\sigma 22} \\ m_{\sigma 32} \end{bmatrix} = 0$$

$$(4,22 - 20,07)m_{\sigma 12} + 3,86 m_{\sigma 22} + 2,57 m_{\sigma 32} = 0$$

$$3,86 m_{\sigma 12} - (1,33 + 20,07) m_{\sigma 22} + 7,04 m_{\sigma 32} = 0$$

$$m_{\sigma 12}^2 + m_{\sigma 22}^2 + m_{\sigma 32}^2 = 1 \quad \vec{m}_{\sigma 2} = \begin{bmatrix} 0,189 \\ 0,345 \\ 0,920 \end{bmatrix}$$

L'autovettore relativo a $\lambda_{\sigma 3}$ è:

$$(C - \lambda_{\sigma 3} I) \vec{m}_{\sigma 3} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4,22 + 4,70 & 3,86 & 2,57 \\ 3,86 & -1,33 + 4,70 & 7,04 \\ 2,57 & 7,04 & 16,78 + 4,70 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{\sigma 13} \\ m_{\sigma 23} \\ m_{\sigma 33} \end{bmatrix} = 0$$

$$(4,22 + 4,70)m_{\sigma 13} + 3,86 m_{\sigma 23} + 2,57 m_{\sigma 33} = 0$$

$$3,86 m_{\sigma 13} + (-1,33 - 4,70) m_{\sigma 23} + 7,04 m_{\sigma 33} = 0$$

$$m_{\sigma 13}^2 + m_{\sigma 23}^2 + m_{\sigma 33}^2 = 1 \quad \vec{m}_{\sigma 3} = \begin{bmatrix} -0,756 \\ -0,630 \\ 0,180 \end{bmatrix}$$

La matrice degli autovettori M_{σ} è:

$$M_{\sigma} = \begin{bmatrix} 0,9998 & 0,189 & -0,756 \\ -0,0128 & 0,345 & -0,630 \\ 0,0176 & 0,920 & 0,180 \end{bmatrix}$$

La relazione fra le coordinate canoniche e le variabili codificate è:

$$\vec{w}_{\sigma} = M_{\sigma}'(\vec{x} - \vec{x}_{\sigma})$$

$$\begin{bmatrix} w_{\sigma 1} \\ w_{\sigma 2} \\ w_{\sigma 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9998 & -0,013 & 0,018 \\ 0,189 & 0,345 & 0,920 \\ -0,756 & -0,630 & 0,180 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 + 0,804 \\ x_2 + 0,162 \\ x_3 + 0,678 \end{bmatrix}$$

Per la minimizzazione della varianza della risposta del processo è opportuno che si abbia:

$$w_{\sigma 1} = 0 \quad 0,9998 (x_1 + 0,804) - 0,013 (x_2 + 0,162) + 0,018 (x_3 + 0,678) = 0$$

$$w_{\sigma 2} = 0 \quad 0,189 (x_1 + 0,804) + 0,345 (x_2 + 0,162) + 0,920 (x_3 + 0,678) = 0$$

§ 4.5.2 METODO GRAFICO PER LA RICERCA DELLE CONDIZIONI OTTIMALI

Per avere indicazioni maggiormente chiare sulle modalità con cui i diversi parametri interagiscano per l'ottenimento di un valore obiettivo della risposta del processo con limiti fissati per la deviazione media standard, è opportuno avvalersi della visualizzazione grafica.

Si riportino le espressioni dei modelli analitici delle due superfici di risposta:

$$\hat{\mu}(\vec{x}) = 327,6 + 177,01x_1 + 109,42x_2 + 131,47x_3 + 66,03x_1x_2 + 75,46x_1x_3 + \\ + 43,58x_2x_3 + 32,01x_1^2 - 22,39x_2^2 - 29,06x_3^2$$

$$\hat{\sigma}(\vec{x}) = 34,9 + 11,52x_1 + 15,32x_2 + 29,17x_3 + 7,73x_1x_2 + 5,14x_1x_3 + \\ + 14,08x_2x_3 + 4,22x_1^2 - 1,33x_2^2 + 16,78x_3^2$$

Ai fini della modellazione grafica, non è necessario prendere in esame tutti i termini.

Riguardo questi ultimi, si trascurino quelli caratterizzati dai coefficienti minori, ai fini della semplificazione di calcolo e si ottengano le relazioni delle superfici ipergeometriche in forma esplicita:

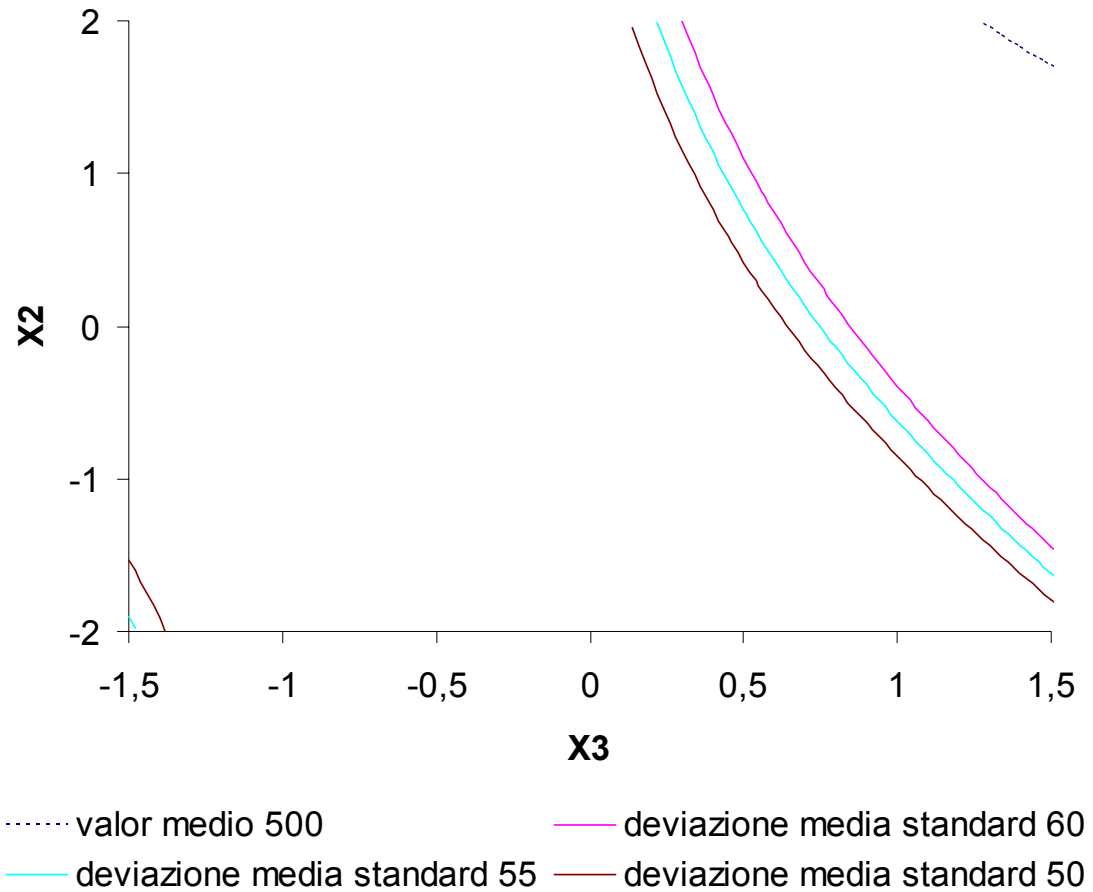
$$x_2 = - \frac{327,6 - \mu + 177x_1 + 131,5x_3 + 32,0x_1^2 - 29,1x_3^2 + 75,5x_3x_1}{109,4 + 43,6x_3 + 66x_1}$$

$$x_2 = - \frac{34,9 - \sigma + 11,5x_1 + 29,2x_3 + 4,2x_1^2 + 16,8x_3^2 + 5,1x_1x_3}{15,3 + 14,1x_3 + 7,7x_1}$$

La rappresentazione dei due luoghi di punti non è possibile nello spazio tridimensionale. È possibile solo se una variabile codificata viene parametrizzata.

Si visualizzino le superfici di risposta nel piano x_2, x_3 , per $x_1 = -1$:

Superfici di risposta del valor medio e della deviazione media standard ($X_1 = -1$)



Qualora si stabiliscano come obiettivi:

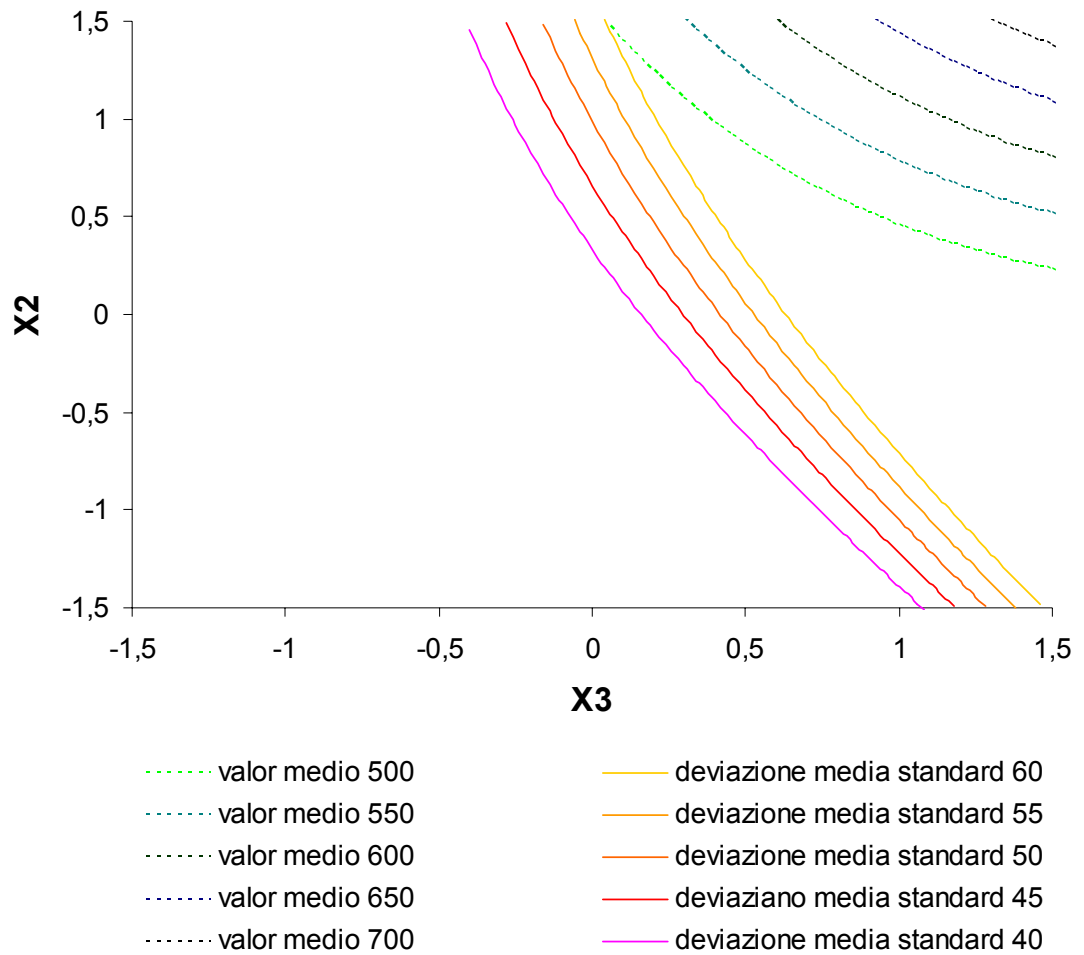
1. valor medio: 500;
2. deviazione media standard limite 60,

si nota che per il valore corrente di x_1 , non si ha alcuna combinazione soddisfacente dei restanti parametri: le superfici limiti di μ e σ sono ben lontane da aver punti in comune.

Si osservi che il valore assegnato della risposta si ha per valori di $x_2 > 1,5$, e $x_3 > 1$, mentre la condizione inerente la deviazione media standard è soddisfatta in un'ampia regione del piano (x_2, x_3) .

Si rappresentino le superfici inerenti $x_1 = 0$:

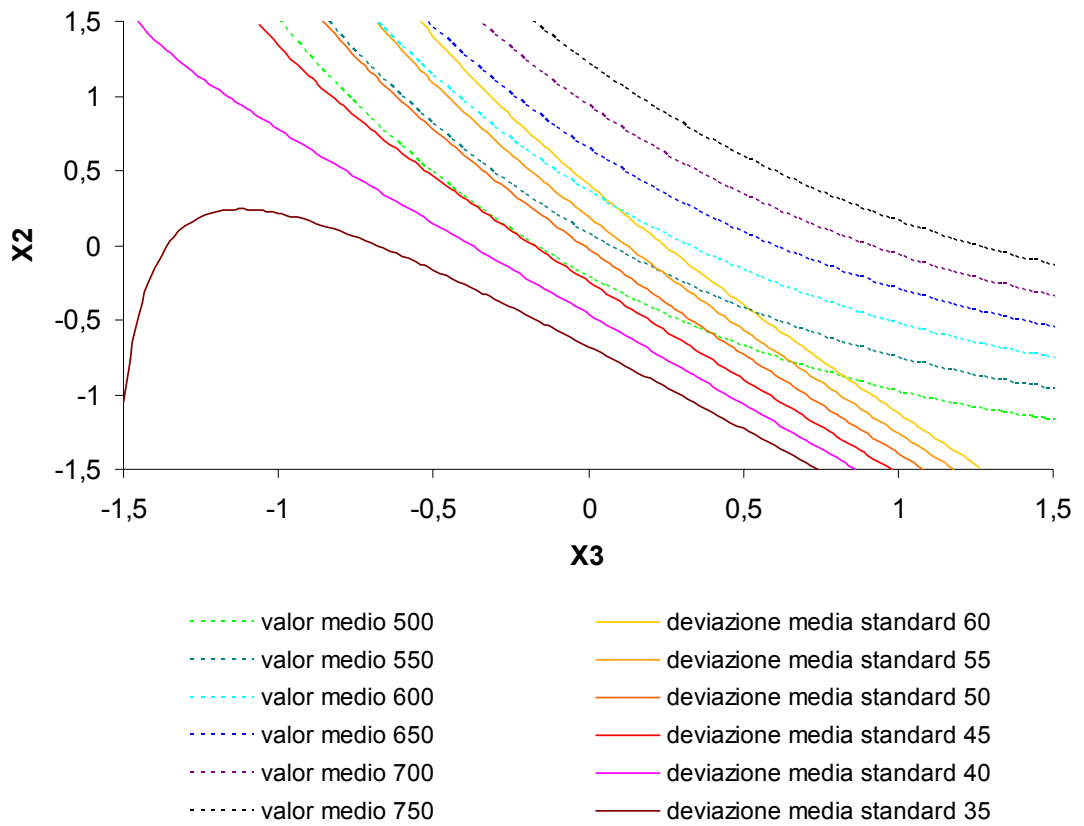
Superfici di risposta del valor medio e della deviazione media standard ($X_1=0$)



si osserva che in prossimità di $x_2 = 1,5$, e di $x_3 = 0,2$ si ha una limitatissima regione in cui gli obiettivi stabiliti sono entrambi conseguiti.

Si riportino le superfici relative a $x_1 = 1$:

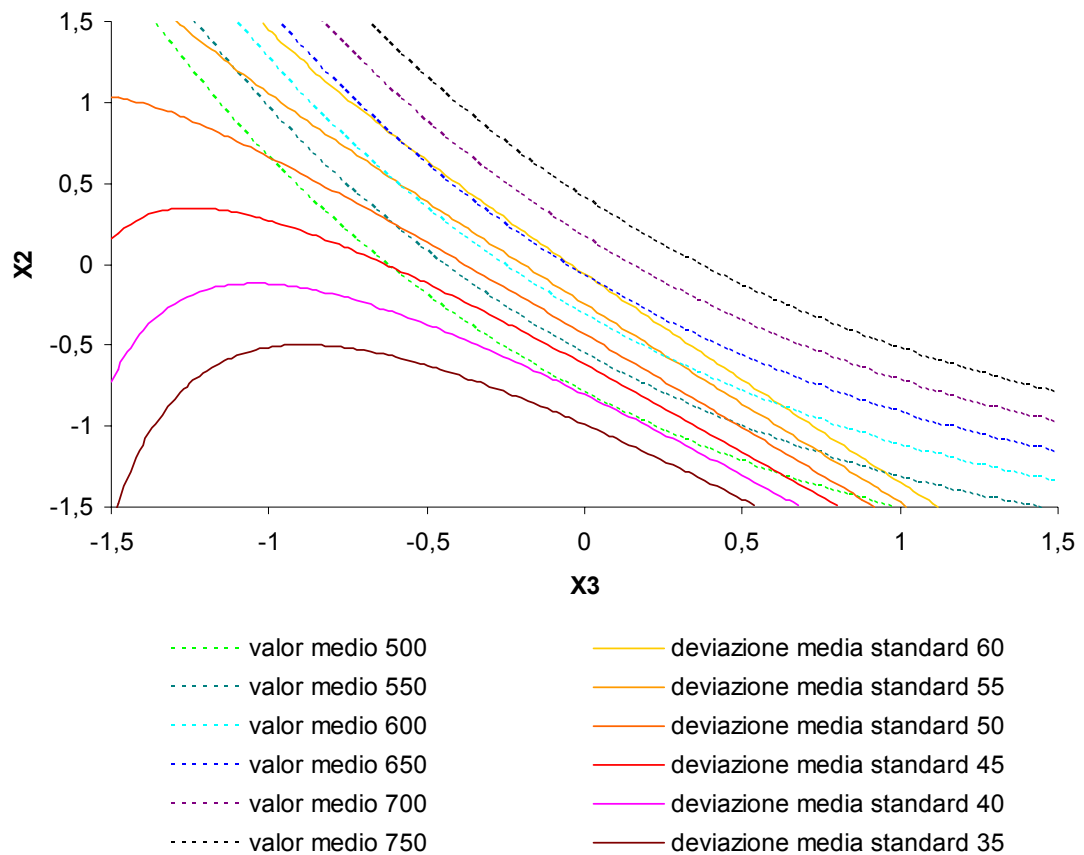
Superfici di risposta del valor medio e della deviazione media standard ($X_1=1$)



si noti il notevole miglioramento: la regione in cui è soddisfatto l'obiettivo è sensibilmente più estesa. È possibile, continuando a rispettare la limitazione sulla deviazione standard, ottenere valori maggiori della risposta, fino a poco oltre 600.

Si analizzino le superfici attinenti a $x_1 = 1,5$:

Superfici di risposta del valor medio e della deviazione media standard ($X_1=1,5$)



Si ha un'ulteriore incremento della regione di coesistenza delle condizioni prestabilite per μ e σ . Si osservi che mantenendo σ limitata a 60, si può ottenere un valore di risposta superiore a 650 e che il target di 500 può essere mantenuto con una deviazione media standard di 40.

Dai modelli grafici elaborati, è evidente l'opportunità di scelta di un valore prossimo all'unità, o superiore per la prima variabile codificata.

Nel prossimo capitolo verrà presentato un software, accessibile liberamente navigando sul sito: [http:// www.nimbus.mit.jyu.fi](http://www.nimbus.mit.jyu.fi), che consente di ottenere per problemi di ottimizzazione combinata una stringa di soluzioni.

CAPITOLO QUINTO

ANALISI DI PROCESSI DI GASSIFICAZIONE DELLE BIOMASSE

§ 5.1 TIPOLOGIE DI IMPIANTI DI GASSIFICAZIONE DELLE BIOMASSE.

Si prendono in esame i soli impianti per la produzione di gas a basso contenuto calorifico (GBCC), nei quali l'aria è l'elemento gassificante (vds §1.1), essendo caratterizzati da semplicità costruttiva, da economicità e conseguentemente da soddisfacente fattibilità di realizzazione, in modo particolare nel campo delle piccole taglie.

Gli impianti si differenziano a seconda delle modalità di interazione fra la corrente d'aria e il combustibile e le tipologie sono le seguenti:

1. impianti a letto fisso;
2. impianti a letto fluido;
3. impianti a letto trascinato.

§ 5.1.1 REATTORI A LETTO FISSO

Il combustibile, ammassato in colonna su di una griglia, è soggetto a gassificazione in condizioni statiche. L'alimentazione della biomassa nel reattore è dovuta alla sola gravità. Qualora la griglia sia soggetta ad un moto rotatorio, viene agevolato il rimescolamento e l'avanzamento della biomassa nel reattore.

L'aria, se immessa dalla base, può fluire dal basso verso l'alto, in controcorrente rispetto al moto del combustibile. In tal caso dalla sommità del reattore esce la miscela gassosa.

Il flusso d'aria, in altre soluzioni impiantistiche, può fluire dall'alto verso il basso. Ciò si realizza se l'immissione aerea si ha nella parte centrale del reattore. In tal caso, la miscela gassosa ottenuta può sia fuoriuscire dalla base del reattore che essere convogliata in un'intercapedine coassiale a quest'ultimo e raggiungere la sommità.

- REATTORI A LETTO FISSO CON FLUSSO CONTROCORRENTE

Nel caso di flusso controcorrente, l'aria immessa dalla base, risale il letto della biomassa, mentre quest'ultima scende per gravità: la materia organica, immessa dall'alto, scendendo, si porta in zone caratterizzate da diversa temperatura subendo nell'ordine:

- l'essiccazione;
- la pirolisi;
- la riduzione;
- l'ossidazione.

La biomassa, pirolizzata nella parte alta del reattore, ove è a temperatura di 400°C, raggiunge la zona di ossidazione, caratterizzata da temperature dell'ordine di 1000°C e successivamente quella di riduzione.

Le reazioni di gassificazione avvengono per il 70% nella zona di ossidazione.

L'aria immessa al di sotto della griglia, salendo verso l'alto, si diffonde uniformemente nella massa reattiva con bassa velocità di flusso (2 m/s), che consente un tempo di contatto fra i reagenti dell'ordine del $\frac{1}{2}$ s.

Con tale soluzione impiantistica si ottiene un gas caratterizzato da bassa polverosità, anche se è ricco di sostanze volatili di elevato peso molecolare ottenute dalla pirolisi della biomassa (tar).

- REATTORI A LETTO FISSO CON FLUSSO EQUICORRENTE

Qualora l'aria fluisca dall'alto verso il basso (flusso equicorrente), il gas fuoriesce al di sotto della griglia, miscelandosi con il particolato.

Tale soluzione impiantistica è caratterizzata dall'inversione, rispetto alla soluzione precedente del flusso controcorrente, dell'ubicazione della zona di ossidazione con quella di riduzione: nella parte alta del reattore ha luogo l'ossidazione, mentre nella parte bassa ha luogo la riduzione, nel caso precedente la disposizione delle due zone era inversa. Si precisa che la successione temporale delle fasi rimane la medesima.

I prodotti di pirolisi che si formano per effetto delle alte temperature raggiunte in assenza di ossigeno, attraversano la zona di ossidazione, caratterizzata da temperatura talmente elevata da dar luogo a reazioni di cracking con decomposizione degli idrocarburi liquidi in fase vapore, che dà luogo alla formazione di gas. Successivamente, si ha la riduzione dei prodotti delle reazioni di riduzione, con formazione di CO e H₂.

Caratteristica della soluzione impiantistica equicorrente è l'alta temperatura del gas uscente che dà problemi di raffreddamento.

Qualora il gas venga convogliato nella camicia coassiale al reattore, l'entalpia del gas prodotto viene recuperata preriscaldando l'aria immessa e il letto della biomassa, migliorando il rendimento del processo.

Il pregio della soluzione del flusso equicorrente rispetto alla precedente è la cattura degli elementi più volatili della biomassa pirolizzata nella zona d'alta temperatura ove vengono crackizzati. Essendo equivalenti i flussi dell'aria e della biomassa, è possibile regolare l'alimentazione della biomassa senza alterazioni dell'equilibrio delle reazioni.

La soluzione equicorrente si presta maggiormente ad applicazioni motoristiche, purché si provveda ad un opportuno filtraggio del gas prodotto, essendo quest'ultimo ricco di particolato.

Lo svantaggio è la necessità dell'alimentazione di combustibile di contenuta pezzatura, onde evitare lo strozzamento in seno al reattore.

§ 5.1.2 REATTORI A LETTO FLUIDO

I gassificatori a letto fluido, confrontati con i precedenti, danno luogo ad una drastica riduzione del tenore di ceneri del gas prodotto.

L'aria e la biomassa, opportunamente miniaturizzata, interagiscono in seno ad una massa sabbiosa che rende omogenea la temperatura; quest'ultima ha tipicamente valori compresi nell'intervallo: 750°C ÷ 900°C, sensibilmente inferiori ai massimi ottenuti nel reattore a letto fisso.

In seno al reattore la biomassa e la sabbia calda si mescolano determinando un'efficiente pirolizzazione della carica organica.

La sabbia, a seconda della velocità con cui l'aria viene convogliata, dà luogo a due tipologie di reattore:

- reattore a letto fluido bollente;
- reattore a letto fluido circolante.

- REATTORE A LETTO FLUIDO BOLLENTE

Tecnologia impiegata per cariche organiche riducibili in particelle millimetriche con granulometria uniforme. Consente l'utilizzo di ogni tipologia di residuo organico.

L'aria, soffiata dal basso, attraversa il letto di sabbia alluminosa inerte con velocità di 1 m/s, sufficiente da mantenerlo nello stato di sospensione senza dar luogo a turbolenti flussi di massa pulverulenta.

Il letto è inizialmente riscaldato dall'esterno con un bruciatore ausiliario. Al raggiungimento della temperatura di $800 \div 900^{\circ}\text{C}$ si ha l'introduzione della biomassa mediante un opportuno sistema di alimentazione.

La carica organica, alimentata con continuità nel reattore, si consuma totalmente, ad eccezione della componente inerte che si confonde con la polvere del letto, rimanendo in gran parte nel reattore ed in minima parte, trascinata dal flusso gassoso, viene rinviata nel reattore stesso, successivamente l'azione di filtraggio.

La gassificazione avviene in prossimità dei 900°C e può essere controllata facilmente variando la portata dell'aria e la quantità introdotta di biomassa.

La temperatura media di funzionamento è inferiore a quella di fusione di gran parte delle ceneri ma determina la gassificazione dei residui ad alto contenuto di ceneri basso-fondenti, rendendo possibile la gassificazione di una vasta gamma di combustibili.

Le caratteristiche principali dei gassificatori a letto fluido bollente operante con aria sono:

- taglia compresa tra 0,3 e 15 t/h di residuo secco;
- possibilità di gassificare un ampio campo di combustibili;
- potere calorifico superiore del gas, compreso tra 4 e 6 MJ/Nm^3 ;
- discreta qualità del gas per quel che riguarda il contenuto di polveri (circa 200 ppm) e catrami (poco superiore a 100 ppm);

- temperatura di uscita del gas compresa tra 500 e 900°C con aria;
- efficienza di gassificazione compresa tra il 70 e il 90%.

- REATTORE A LETTO FLUIDO CIRCOLANTE

È caratterizzato dalla velocità con cui viene immessa l'aria ($5 \div 6 \text{ m/s}$) che determina un intimo mescolamento del letto siliceo e della carica organica. Un ciclone posto a valle del reattore, recupera la fase solida trascinata dal gas, convogliandola all'interno del letto.

Rispetto alla precedente tipologia, si ha una superiore potenzialità di gassificazione per unità di superficie del letto, con possibilità di contrazione delle dimensioni d'impianto.

Le caratteristiche sono le seguenti:

- potenzialità fra 0,3 e 30 t/h di residuo solido;
- necessità di alimentazione abbastanza specifica;
- potere calorifico superiore del gas, compreso tra 5 e 6,5 MJ/Nm³;
- discreta qualità del gas prodotto, caratterizzato da una contenuta quantità di particolato (inferiore a 200 ppm) e catrami (entro i 400 ppm);
- temperatura del gas in uscita tra i 700 e i 1200°C;
- efficienza della gassificazione compresa tra il 75 e il 90%.

§ 5.1.3 REATTORI A LETTO TRASCINATO

Il letto è costituito dalla stessa carica organica, mantenuta in movimento in seno al gassificatore dallo stesso gas prodotto.

L'elemento principale è un bruciatore operante in difetto di aria.

Il sistema a letto trascinato in fase fluidificata consente un efficiente contatto tra la fase solida e la fase gassosa determinando buoni rendimenti di gassificazione.

Caratteristiche principali sono:

- breve tempo di permanenza del combustibile all'interno del gassificatore con conseguente alta velocità del gas;

- impiego della pressione operativa come variabile di controllo del processo;
- alta temperatura operativa (sopra i 1200°C);
- basso contenuto di catrami (idrocarburi pesanti) e di particolato.

§ 5.2 IMPIANTO MULTIREATTORE DI GASSIFICAZIONE DELLE BIOMASSE (BREVETTO DELL'ING. ALESSANDRO MARIANI E DI ANGELO MARIANI).

Il processo di gassificazione si articola in fasi, aventi caratteristiche molto diverse tra loro. In ognuna delle tipologie dei sistemi di gassificazione illustrati, l'essiccazione, la pirolisi, la combustione e la riduzione, hanno luogo in un unico ambiente, caratterizzato da condizioni omogenee di temperatura, pressione, portata d'aria e biomassa. Le diverse reazioni, costituenti nel loro insieme il processo di gassificazione hanno condizioni fisiche ottimali particolarmente eterogenee, rendendo impossibile l'ottimizzazione di ogni fase, qualora avvengano tutte nello stesso ambiente fisico.

Nel gassificatore multireattore, le distinte fasi hanno luogo in ambienti distinti: l'ottimizzazione a tutto campo della gassificazione non è utopica.

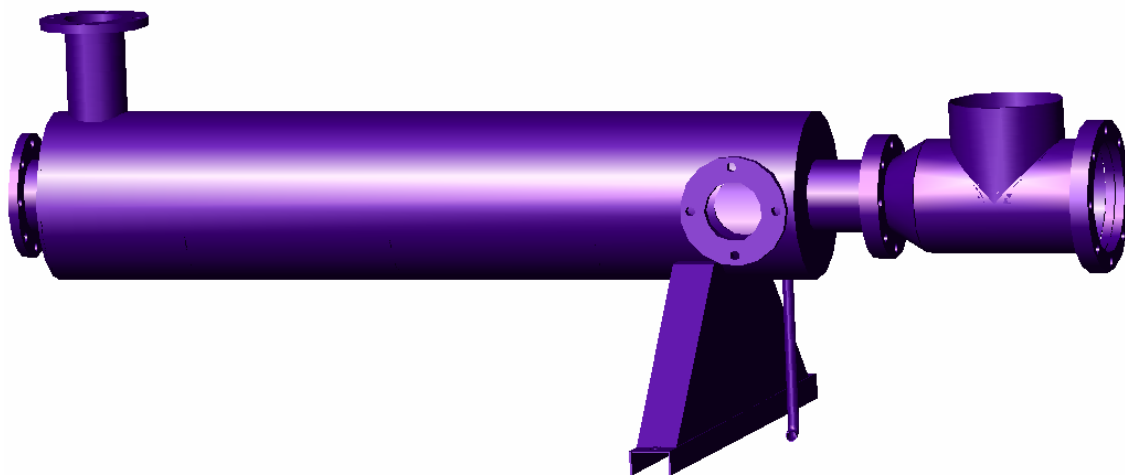
Ogni fase può essere attuata nelle condizioni migliori possibili.

Il tutto dà luogo a:

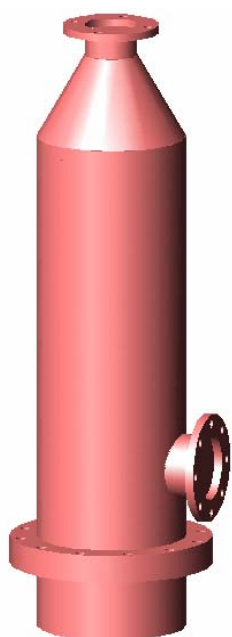
- ottima qualità del syngas in uscita, esente da prodotti catramosi;
- possibilità di utilizzo di biomasse eterogenee sia per composizione che per pezzatura;
- indipendenza della purezza del gas dalle condizioni della carica organica di alimentazione;
- conduzione delle diverse reazioni a temperature massime non superiori a 800°C, rendendo possibile l'impiego, in sede realizzativa, di acciai economici (AISI 304).

§ 5.2.1 DESCRIZIONE DELL'IMPIANTO EDM 001

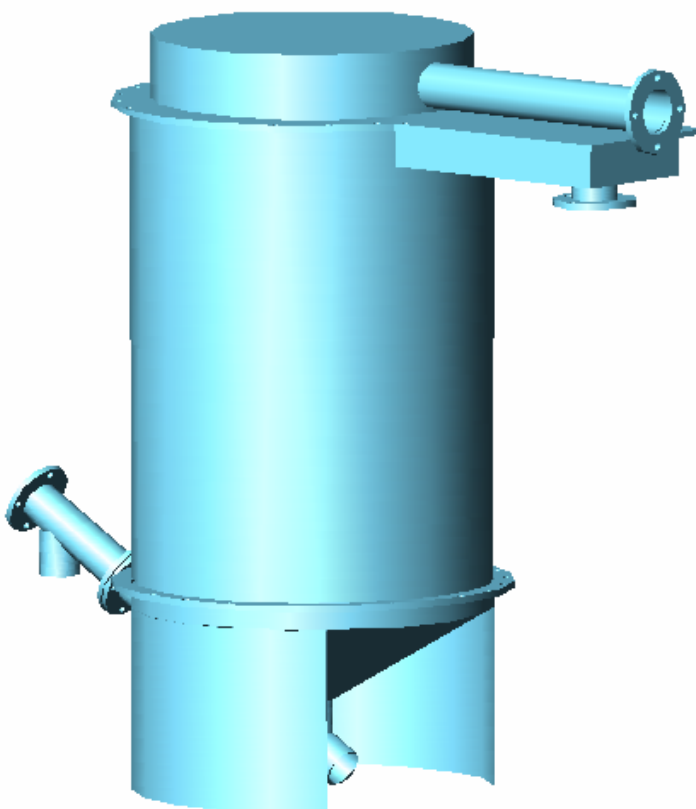
Le reazioni di pirolisi, ossidazione e riduzione hanno luogo in distinti reattori. Si rappresenta la modellizzazione di ciascuno:



Reattore di pirolisi



Reattore di ossidazione



Reattore di riduzione

L'impianto si compone fondamentalmente di 4 sezioni:

- sistema di gassificazione;
- sistema di filtraggio;
- unità di controllo;
- gruppo elettrogeno.

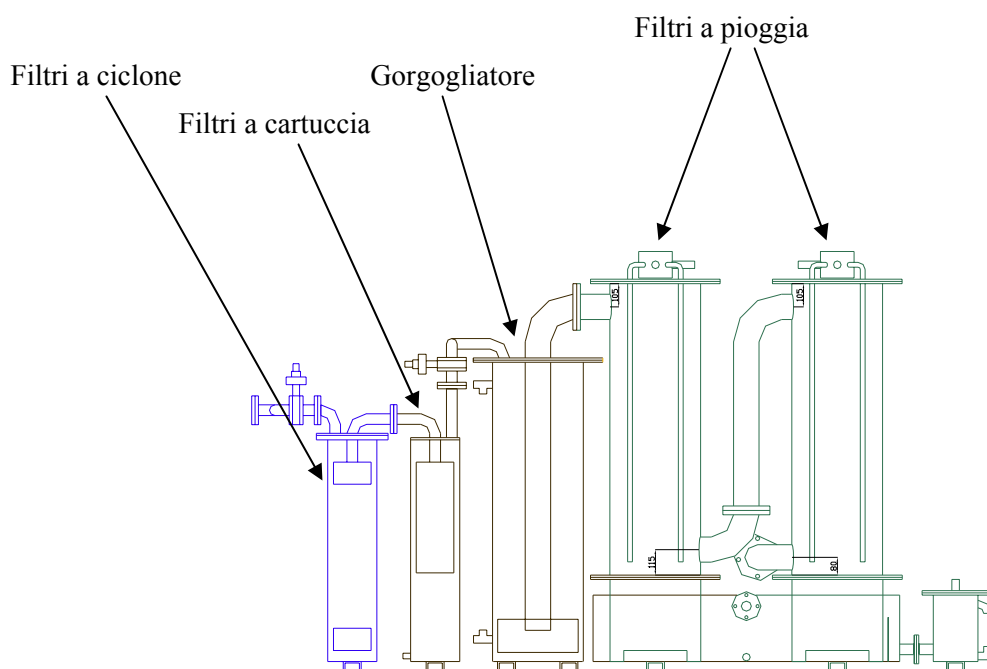
Il sistema di gassificazione si compone delle seguenti unità:

- tramoggia;
- reattore di pirolisi;
- reattore di ossidazione;
- reattore di riduzione.

Il sistema di filtraggio si compone di:

- n. 2 filtri a pioggia;
- n. 1 gorgogliatore;
- n. 2 filtri a cartuccia;
- n. 2 filtri a ciclone.

Si rappresenti lo schema della sezione filtrante:



- TRAMOGGIA

Mediante la tramoggia si ha il caricamento della biomassa.

L'alimentazione di quest'ultima è particolarmente critica, a causa della sua eterogeneità sia in termini di pezzatura che in termini di caratteristiche meccaniche (attrito interno, resistenza al costipamento, attrito con le pareti della tramoggia).

Ai fini della gestione di qualsiasi tipologia di biomassa, la tramoggia presenta un sistema rotativo tri-pala orizzontale interno, ruotante intorno ad un asse verticale, azionato da un motoriduttore; si realizza in tal maniera un continuo convogliamento nel reattore di pirolisi.

- REATTORE DI PIROLISI

Il reattore di pirolisi è uno scambiatore di calore di forma tubolare, entro il quale è presente una coclea che conduce lentamente la biomassa sino al reattore di ossidazione.

Nel mantello coassiale alla coclea, il gas caldo, prodotto nel reattore di ossidazione, fluisce controcorrente rispetto alla carica organica.

Modulando opportunamente la velocità di rotazione della coclea, si regola il tempo di permanenza della biomassa nel reattore; tale intervallo generalmente è prossimo ai 40'.

Il grado di pirolisi raggiunto dalla biomassa è funzione della sua umidità, considerato il rilevante calore assorbito generato dall'evaporazione dell'acqua ivi contenuta, dalle caratteristiche fisiche e geometriche della carica, non ultime la forma e la pezzatura, nonché dalla temperatura del gas riscaldante.

A causa della cattiva conduzione di calore in seno alla biomassa, quest'ultima reagisce in maniera eterogenea, ma essendo la temperatura relativa al gas nel mantello ($500 \div 600$ °C) molto superiore al valore necessario per la pirolisi, si ha comunque un consono riscaldamento di tutto il materiale, compreso quello più interno.

All'interno del reattore, in assenza o forte carenza di ossigeno, la biomassa subisce un processo di pirolisi lenta per ottenere alla fine char (residuo solido pulverulento) e una frazione gassosa.

Il reattore di pirolisi è collegato al reattore di ossidazione dove tutti i prodotti della pirolisi e la biomassa residua vengono trasformati in syngas (gas di sintesi).

- REATTORE DI OSSIDAZIONE

Dalla pirolisi si ottengono prodotti nelle fasi gassosa e solida. La materia pirolizzata giunge al reattore di ossidazione a letto fluidizzato ove si ha la separazione delle fasi: il gas si dirige verso la sommità del reattore, mentre le frazioni solide precipitano nella parte bassa, ove vengono a contatto con l'aria che ne determina un'ossidazione molto rapida.

Il syngas in uscita trascina con sé polvere di carbonio e ceneri.

L'ossidazione, avvenendo in difetto di ossigeno, non determina la reazione di tutto il carbonio e di tutto l'idrogeno presenti.

Il parametro di controllo è la temperatura; il valore di quest'ultima è associato alla quantità d'aria presente nella reazione caratterizzante l'ossidazione: partendo dalla combustione con eccesso d'aria e riducendo sempre più la portata, avvicinandosi al valore stechiometrico, si ottiene un continuo aumento della temperatura in seno al reattore, per effetto della continua diminuzione della frazione di ossigeno non impegnata nella reazione; al di sotto del valore stechiometrico, la temperatura decresce sempre più in quanto diminuisce la frazione di biomassa interessata dalla combustione.

Stabilita la portata d'aria, regolata mediante una valvola a controllo elettronico, essendo la quantità di syngas prodotta proporzionale all'aria iniettata, la temperatura viene regolata agendo sull'alimentazione del reattore di ossidazione: il segnale associato al valore di temperatura giunge all'inverter del motoriduttore della coclea del reattore di pirolisi, variandone la velocità di rotazione.

Un abbassamento della temperatura è dovuto all'incremento del contenuto di carbonio della biomassa che determina un abbassamento del rapporto ossigeno/carbonio rispetto al valore stechiometrico; in tali condizioni l'inverter comanda un rallentamento della velocità di rotazione della coclea.

Le variazioni si hanno in tempo reale: modificando di pochi Hz la velocità di rotazione della coclea, si ha una variazione quasi immediata della temperatura.

- REATTORE DI RIDUZIONE

Uscito dal reattore di ossidazione, il syngas, miscelato con residui solidi carboniosi (char), raggiunge il reattore di riduzione, ove per effetto delle reazioni in cui interagiscono l'acqua, l'anidride carbonica, e il carbonio libero, viene raffreddato.

Si riportino tali reazioni:



La concentrazione dei diversi reagenti è funzione della temperatura raggiunta nel reattore di ossidazione.

Ai fini della qualità del gas, è necessario che il calore prodotto in quest'ultimo si disperda il meno possibile verso l'esterno, per il mantenimento dell'opportuno valore della temperatura.

Il reattore di riduzione è costituito in maniera tale da prolungare il più possibile la miscelazione fra il carbonio contenuto nelle polveri di char ed i gas caldi (CO_2 e H_2O) ai fini della minimizzazione del residuo solido e della massimizzazione dei tenori di H_2 e CO , che si traduce in un ottimale potere calorifico inferiore del syngas.

Si ha un'importante azione filtrante in corrispondenza del pelo libero della vasca posta alla base del reattore: il flusso di gas, soggetto all'inversione del moto, deposita gran parte delle ceneri presenti in esso.

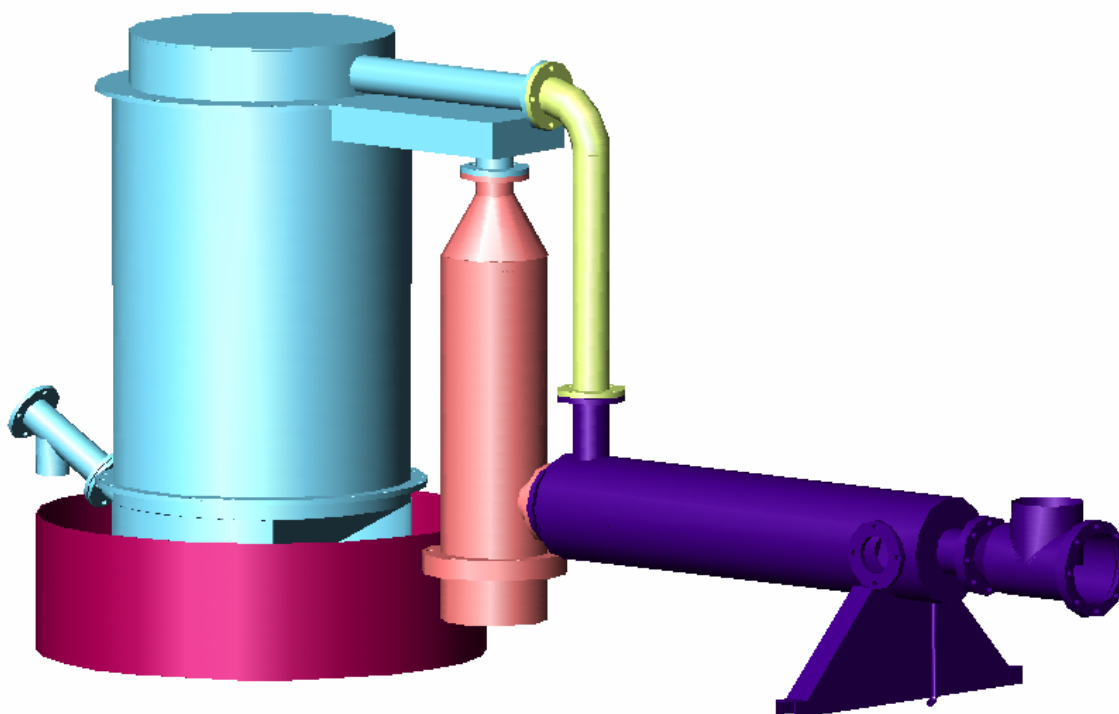
Il diametro del tubo costituente il corpo del reattore è dimensionato in modo tale che il syngas abbia una velocità di risalita inferiore a 0,1 m/s al fine di evitare il trascinamento di particelle di diametro superiore al micron.

È prevista, nelle future realizzazioni dell'impianto, la presenza di un reattore di catalizzazione, nel quale le frazioni volatili degli idrocarburi costituenti il tar, prodotti nella fase di pirolisi e il metano, formatosi nel riduttore, siano soggetti al processo di reforming, in cui gli elementi $C_\alpha H_\beta$ siano ridotti in CO e H_2

E' di fondamentale importanza che il gas giunga al reattore di catalisi opportunamente depurato dalle ceneri del char, per evitarne il deposito sulle superfici del catalizzatore che ne impedirebbe l'azione.

Nell'attuale versione dell'impianto, non essendo presente il catalizzatore, il gas caldo, uscito dal reattore di riduzione, viene convogliato nel mantello del reattore di pirolisi, ove permane per un intervallo di tempo di 10÷15 s; successivamente raggiunge la sezione di filtraggio.

Si riporta la modellazione della sezione di gassificazione:



- FILTRI A PIOGGIA

Nei filtri a pioggia il gas viene investito da spruzzi d'acqua che lo raffreddano determinando la condensazione degli elementi volatili del tar, fra cui il catrame.

Si determina inoltre la condensazione del vapor acqueo, al fine di eliminare il catrame in sospensione e gli eventuali composti chimici aggressivi che potrebbero danneggiare i componenti a valle.

L'acqua utilizzata per il lavaggio viene poi riciclata tramite pompa dopo essere stata depurata dalle polveri e dal catrame mediante un decantatore.

- GORGOGLIATORE

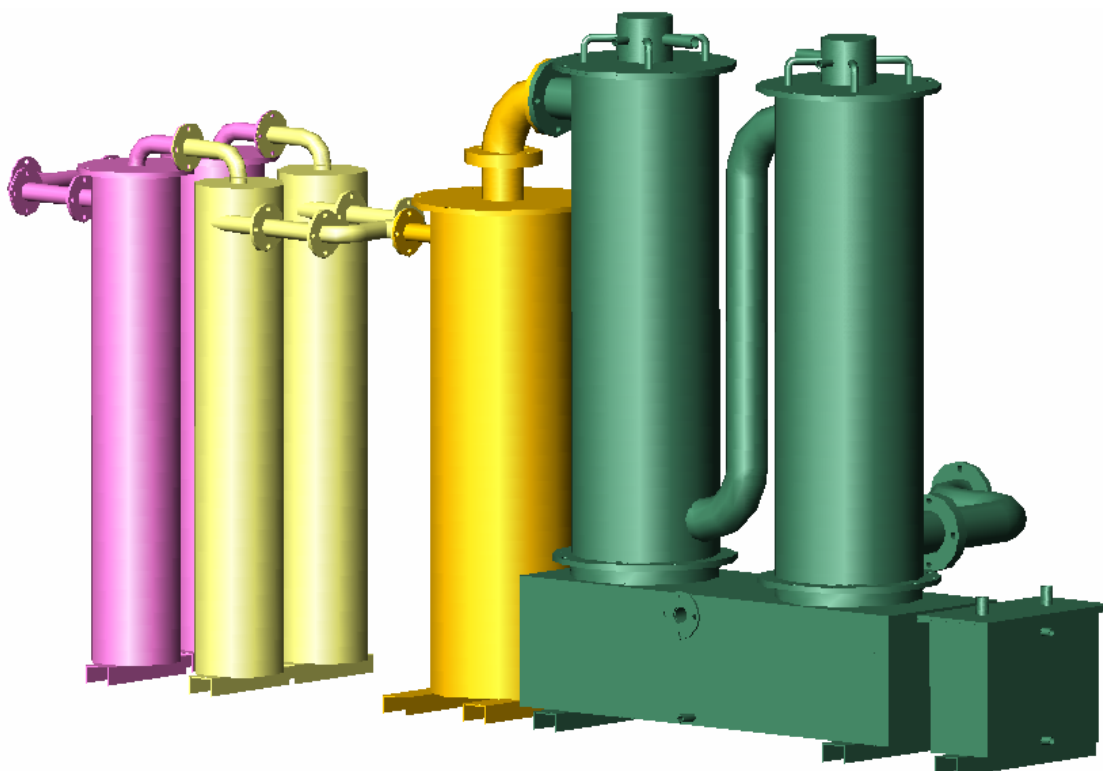
Dopo essere passato nei filtri a pioggia, il gas viene inviato al gorgogliatore, ove viene ulteriormente lavato in acqua, perdendo gli ulteriori residui catramosi e le polveri di char.

- FILTRI A CARTUCCIA E FILTRI A CICLONE

Nei cicloni, le particelle di polvere residue, sono costrette ad un moto elicoidale che ne determina la precipitazione.

Le cartucce sono costituite da setacci con fori di 25 μm , per bloccare le particelle più piccole.

Si riporta la modellazione della sezione di filtraggio:



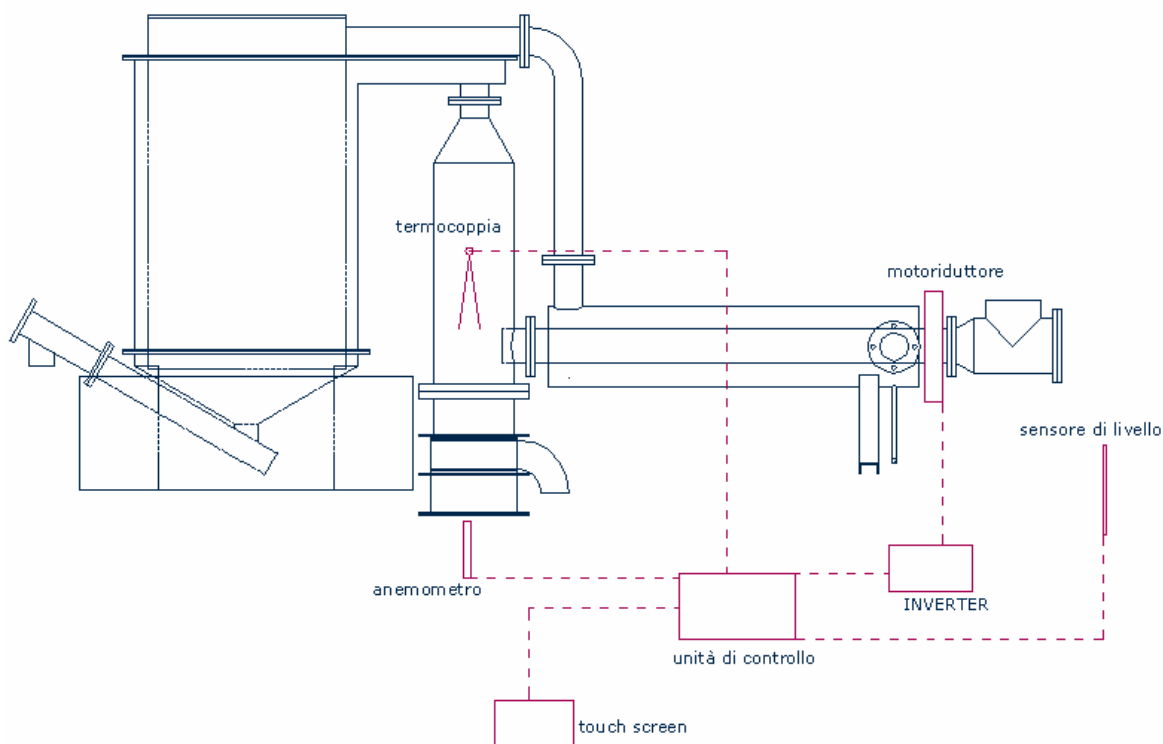
- UNITÀ DI CONTROLLO

L'unità di controllo è costituito da un touch screen, atto alla visualizzazione dei valori dei parametri di regolazione del processo, rilevati mediante opportuni sensori:

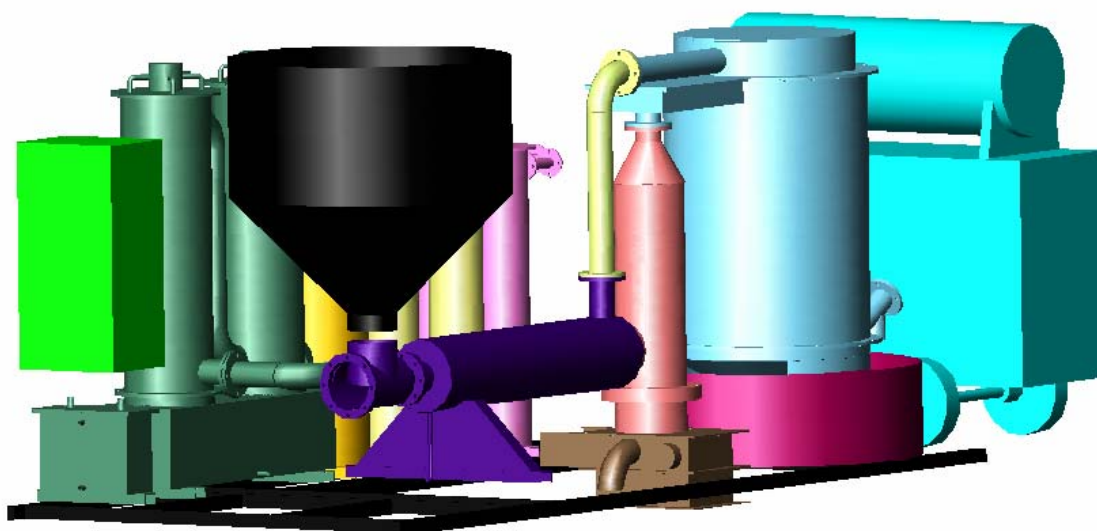
- termocoppia di tipo K (Cr, Al) sita nel reattore di gassificazione;
- anemometro a filo caldo, che rileva la velocità dell'aria in ingresso;
- sensori per i livelli dei serbatoi dell'acqua nei filtri;
- inverter atto alla regolazione della velocità della coclea nel reattore di pirolisi.

Fondamentali per la regolazione del rapporto biomassa/aria sono l'inverter e la termocoppia.

Si riporta lo schema del sistema di controllo:



Si riporta infine la modellazione di insieme del gassificatore Edm 001:



§ 5.2.2 OTTIMIZZAZIONE DELL'IMPIANTO EDM 001

Occorre in primo luogo la definizione degli obiettivi da ottimizzare; questi ultimi siano:

- massimizzazione del potere calorifico inferiore del syngas;
- minimizzazione della variabilità delle caratteristiche del syngas a fronte dell'eterogeneità delle caratteristiche della biomassa di alimentazione scelta.

- DEFINIZIONE DEI PARAMETRI D'INTERVENTO

Dalla descrizione dell'impianto, emergono i seguenti parametri suscettibili di regolazione:

- portata d'aria, regolata mediante valvola;
- temperatura del processo di ossidazione.

La portata d'aria è strettamente dipendente dalla portata di syngas richiesta, destinata all'alimentazione del motore endotermico del gruppo elettrogeno; quest'ultimo deve ruotare ad un numero di giri il più possibile costante, per garantire all'uscita dell'alternatore una data frequenza di alimentazione elettrica (50Hz); si ha una limitata possibilità di intervento sul primo parametro, essendo la

portata di syngas prodotta consumata in tempo reale dal motore, al fine di evitare accumuli a vantaggio della sicurezza.

Già è stata asserita l'importanza della temperatura di ossidazione (T), che è il dato di ingresso più importante del sistema di controllo.

Si ricorda che il dato di uscita, condizionato da T è la velocità di rotazione della coclea, dalla quale dipende la portata di alimentazione della biomassa.

- DEFINIZIONE DELLE CAUSE DI VARIABILITÀ

Le cause di variabilità sono fondamentalmente dettate dalla eterogeneità delle caratteristiche della biomassa scelta per l'alimentazione:

- impurità presenti, che ai fini del potere calorifico del syngas sono influenti solo in quanto determinano la variazione dei tenori di carbonio, idrogeno, ed ossigeno, di interesse ai fini della gassificazione;
- umidità eterogenea, che si traduce nella variabilità dei tenori di vapor acqueo ed idrogeno del syngas;
- pezzatura eterogenea che si traduce nella variabilità del contenuto di carbonio alimentato dalla coclea: una pezzatura grossolana determina un incremento di spazi vuoti nella carica organica di alimentazione.

- NECESSITÀ DI INTERVENTO SUL SISTEMA DI CONTROLLO

È necessario individuare l'ottimale prontezza di intervento del sistema di controllo nei riguardi della variazione della velocità di rotazione della coclea, indotta dalla variazione del segnale inerente la termocoppia posta all'interno del reattore di ossidazione.

Un intervento eccessivamente deciso, determinato da una variazione minima delle condizioni presenti nel reattore può portare ad una variazione eccessiva della portata della biomassa, determinando una brusca variazione del rapporto biomassa/ossigeno che si traduce in un altrettanto brusca variazione della

temperatura del reattore, rendendo impossibile il raggiungimento di condizioni di equilibrio: il processo si rileva instabile.

Un intervento eccessivamente blando del sistema di controllo non determina alcuna variazione di rilievo nelle condizioni di ossidazione.

La prontezza di intervento è il guadagno (k) del sistema di controllo. Una progettazione parametrica robusta del processo non può prescindere da tale fattore.

- DEFINIZIONE DEL PIANO SPERIMENTALE

Per l'alimentazione dell'impianto, si considerino dei campioni di una data materia organica, caratterizzati da 2 livelli per ognuno dei seguenti fattori di disturbo:

- eterogeneità di umidità (z_1);
- eterogeneità di pezzatura (z_2).

Si rinuncia alla selezione della carica basata sul grado di impurità, per la scarsa fattibilità; l'effetto della terza causa di variabilità non viene quindi distinto dall'errore sperimentale.

Ai fini della regolazione del processo, considerata la ridotta possibilità di intervento inerente la portata d'aria d'ingresso al reattore di ossidazione, si decide di agire su:

- valore di riferimento della temperatura del reattore di ossidazione (x_1);
- guadagno del sistema di controllo (x_2).

L'azione di comando sull'inverter viene esplicitata nel momento in cui il valore di temperatura monitorato dalla termocoppia, differisce dal valore di riferimento.

Si scelgono 2 livelli per x_1 ed x_2 .

Viene eseguito un piano fattoriale 2^4 con 5 ripetizioni delle condizioni iniziali relative al processo e alla biomassa:

N	x ₁	x ₂	z ₁	z ₂	ordine di esecuzione
1	-1	-1	-1	-1	20
2	1	-1	-1	-1	11
3	-1	1	-1	-1	16
4	1	1	-1	-1	9
5	-1	-1	1	-1	14
6	1	-1	1	-1	19
7	-1	1	1	-1	17
8	1	1	1	-1	21
9	-1	-1	-1	1	18
10	1	-1	-1	1	13
11	-1	1	-1	1	2
12	1	1	-1	1	4
13	-1	-1	1	1	10
14	1	-1	1	1	5
15	-1	1	1	1	15
16	1	1	1	1	3
17	0	0	0	0	8
18	0	0	0	0	12
19	0	0	0	0	6
20	0	0	0	0	1
21	0	0	0	0	7

Si ricordi di casualizzare l'ordine di esecuzione degli esperimenti, al fine di minimizzare l'influenza di cause di variazione non contemplate nel modello interpretativo.

- DETERMINAZIONE DEL POTERE CALORIFICO INFERIORE DEL SYNGAS

Il potere calorifico inferiore (viene definito inferiore in quanto non contempla il calore liberato nella condensazione del vapor acqueo) del syngas prodotto è determinato sulla base dell'analisi cromatografia, atta all'individuazione della composizione.

Si riporti il risultato relativo ad una pregressa sperimentazione:

Caratteristiche del gas in uscita dal gassificatore

Vapore d'acqua nel gas in uscita [m ³ /h]	8,40	10,5%
CO nel gas in uscita [m ³ /h]	14,40	18,0%
CO ₂ nel gas in uscita [m ³ /h]	7,84	9,8%
H ₂ nel gas in uscita [m ³ /h]	14,4	18,0%
CH ₄ nel gas in uscita [m ³ /h]	2,4	3,0%
N ₂ nel gas in uscita [m ³ /h]	32,56	40,7%
Gas in uscita [Nm ³ /h]	80,00	100%

Il valore medio del potere calorifico inferiore, ottenuto a seguito di prove con diverse biomasse, in assenza di umidità, è risultato essere: 18,18 MJ/kg.

- IPOTESI SUL MODELLO ANALITICO BASATO SUL PIANO
SPERIMENTALE DEFINITO

Non disponendo dei risultati relativi al piano sperimentale illustrato, si può solo ipotizzare l'espressione analitica del modello analitico della risposta del sistema.

Si supponga di avere ottenuto con il metodo dei minimi quadrati illustrato nel capitolo precedente, la seguente espressione della superficie di risposta:

$$y = 17,5 + 1,0x_1 - 0,5x_2 - 4,5z_1 + 0,2z_2 + 2,0x_1z_1 + 1,5x_1z_2 + 1,0x_2z_2 - 1,5x_1x_2$$

Il modello è ipotizzato sulla base dei dati elaborati in una campagna sperimentale risalente al 2006, sintetizzati nella seguente tabella:

	Umidità	Potere calorifico [kcal/kg]	Umidità	Potere calorifico [kcal/kg]
legna faggio	18,20%	14,40	25%	13,20
legna olmo	6,50%	17,50	25%	14,04
legna segatura	14,70%	15,70	25%	13,80
legna mista	15,50%	15,20	25%	13,49
pula di riso	6,80%	14,44	25%	11,62
pula di cotone	9,80%	15,74	25%	13,09
pericarpi di girasole	9%	20,34	25%	16,77
pannello di girasole	8,70%	20,09	25%	16,51
sansa delle olive	7,40%	21,17	25%	17,15
gusci di nocciola	13%	16,49	25%	14,22
gusci di mandorle	10,40%	16,62	25%	13,91
tutoli di mais	4,50%	16,67	25%	13,09
stoppie di granturco	16%	15,95	25%	14,24
frazione organica RSU	0%	17,79	25%	13,34
paglia di riso	0%	16,74	25%	12,56
paglia di frumento	0%	17,87	25%	13,41
stocchi di mais	0%	18,46	25%	13,85
residui di bietola	0%	14,57	25%	10,93
residui di pomodoro	0%	14,61	25%	10,96
residui di cavolfiore	0%	14,82	25%	11,11
sarmenti di vite	0%	18,92	25%	14,19
potatura di pesco	0%	19,42	25%	14,57
potatura di olivo	0%	18,13	25%	13,59

Il coefficiente relativo all'umidità, di notevole entità rispetto agli altri, è giustificato dall'osservazione dei dati in tabella; si osservi come il dato relativo alla potatura di olivo decresca al passare del tenore d'acqua da 0% al 25%.

Il coefficiente inerente l'eterogeneità della pezzatura, dovrebbe essere molto più contenuto, considerata la piccola differenza fra i dati inerenti la legna di faggio e la segatura.

Si ipotizza che le interazioni fra i parametri ed i disturbi, siano più rilevanti degli stessi effetti dei parametri.

Naturalmente il modello formulato può risultare del tutto non veritiero, soprattutto per ciò che riguarda la scelta dei coefficienti relativi ai parametri di controllo.

Non essendo correlate le cause di disturbo ed ipotizzando per i relativi valori attesi il valore nullo [$E(z_1) = 0$ e $E(z_2) = 0$], si ottiene l'espressione della superficie di risposta relativa al valor medio:

$$\mu = 17,5 + 1,0x_1 - 0,5x_2 - 1,5x_1x_2$$

Applicando la formula della propagazione degli errori:

$$\sigma_Y^2 = \sum_j \left(\frac{\partial Y}{\partial Z_j} \right)^2 \sigma_{Z_j}^2 + \sigma_{res}^2$$

ove σ_{res}^2 è il valore dell'errore sperimentale apprezzabile nelle 5 ripetizioni delle condizioni iniziali, che si ipotizza, per semplicità, essere unitario, ed ipotizzando i valori unitari per le varianze dei disturbi [$\sigma^2(z_1) = 1$ e $\sigma^2(z_2) = 1$], si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= (-4,5 + 2,0x_1)^2 + (0,2 + 1,5x_1 + 1,0x_2)^2 + 1 = \\ &= 20,25 + 4,0x_1^2 - 18x_1 + 0,04 + 2,25x_1^2 + 1,0x_2^2 + 0,6x_1 + 0,4x_2 + 3,0x_1x_2 + 1 = \\ &= 21,29 - 17,4x_1 + 0,4x_2 + 6,25x_1^2 + 1,0x_2^2 + 3,0x_1x_2 \end{aligned}$$

l'espressione della superficie di risposta relativa alla varianza:

$$\sigma = 21,29 - 17,4x_1 + 0,4x_2 + 6,25x_1^2 + 1,0x_2^2 + 3,0x_1x_2$$

- APPLICAZIONE DELL'ALGORITMO NIMBUS PER LA DEFINIZIONE DELLA STRINGA DEI VALORI OTTIMALI PER I PARAMETRI

Il NIMBUS (Nondifferentiable Interactive Multiobjective BUndle-based optimization System) è un algoritmo atto all'ottimizzazione di più funzioni obiettivo di ogni tipo, anche non differenziabili.

Nella prima fase si riportano le espressioni delle due funzioni, (nel caso contingente le due superfici di risposta relative al valor medio ed alla varianza).

Nella seconda fase viene definito il problema (NLMOP - Non Linear Multiobjective Programming): massimizzazione del valor medio μ e minimizzazione della varianza σ^2 di risposta del processo di gassificazione.

La modalità di risoluzione del programma è di tipo iterativo.

Ad ogni soluzione elaborata, esprimendo l'NLMOP, si ottiene una nuova soluzione espressa nelle variabili x_1 e x_2 .

Al termine del processo si ottengono delle stringhe di soluzioni ottimali.

Si riportino le diverse fasi relative alla soluzione del caso trattato:

WWW-NIMBUS ## New Problem - Windows Internet Explorer

http://nimbus.it.jyu.fi/cgi-bin/N4/login.py

File Modifica Visualizza Preferiti Strumenti ?

WWW-NIMBUS ## New Problem

NIMBUS TUTORIAL HELP

Welcome to NIMBUS, moretti1

Start New Problem

Name of the problem

Problem description

maximize medium value response f1(x1,x2)
minimize variance f2(x1,x2)

Number of objective functions

Number of variables

Number of linear constraints (not including box constraints)

Number of nonlinear inequality constraints

Number of nonlinear equality constraints

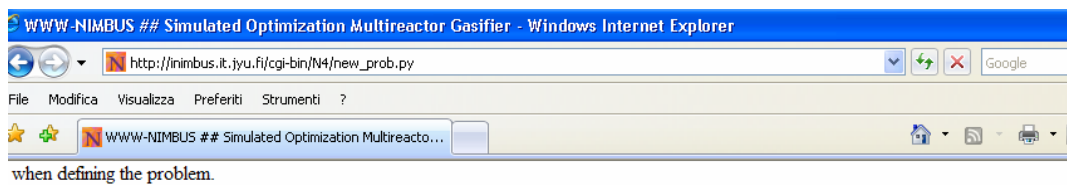
Select operation

☒ Input the problem ☐ Input the problem as a fortran file (only for local users!)

☐ Open a saved problem ☐ Remove a saved problem

☐ Change the password

Fase 1: descrizione dell'NLMOP



Objective functions to be optimized

	name	: expression	Lowest Value	Highest Value
Max	f1	$17.5 + x_1 - 0.5 \cdot x_2 - 1.5 \cdot x_1 \cdot x_2$		
Min	f2	$21.29 - 17.4 \cdot x_1 + 0.4 \cdot x_2 + 6.25 \cdot (x_1^2) + (x_2^2) + 3 \cdot x_1 \cdot x_2$		

Use [Standard functions available](#)

Variables

☐ Use [autofill](#)

	lower bound	<= starting point	<= upper bound	Integer values
x1	-2	0	2	☐
x2	-1	0	1	☐

Linear Constraints

	Ax	b
No1 :	$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2$	≤ 1
No2 :	$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2$	≤ 2

Next optimization: [Global 1 + Local \(PB\)](#)

Fase 2: indicazione delle funzione obiettivo;
indicazione intervalli delle variabili.

WWW-NIMBUS ## Simulated Optimization Multireactor Gasifier - Windows Internet Explorer

http://nimbus.it.jyu.fi/cgi-bin/N4/enter_prob.py

File Modifica Visualizza Preferiti Strumenti ?

WWW-NIMBUS ## Simulated Optimization Multireacto...

Classify Functions

Please, save the problem if you wish to use it another time. Specify the direction of change from the current criterion vector by selecting :
each function. To use graphical classification instead, select the appropriate operation below.

Function	Current solution	Class:	<	<=	=	>=	>
Max f1	22.64857		☐	☐	☐	☐	☒
Min f2	5.566869		☐	☐	☐	☐	☒

Function	Lowest Value	Highest Value
Max f1	22.08	23.0
Min f2	5.2436	6.09

Next optimization: Local (PB)

Maximum number of new solutions to be generated: Four

☐ Another problem

☐ Remove a saved problem

☐ Use graphical classification instead

☐ Correct Highest or Lowest values

☐ Modify this problem

Select operation

☐ Save the current problem

☒ Specify classification parameters if necessary (continue)

☐ Go to solution database

☐ Show the whole problem

☐ Stop

Fase 3.1.a: ottenimento dei valori ottimali delle funzioni obiettivo in merito alla prima classificazione

WWW-NIMBUS ## Simulated Optimization Multireactor Gasifier - Windows Internet Explorer

http://inimbus.it.jyu.fi/cgi-bin/N4/classif.py

File Modifica Visualizza Preferiti Strumenti ?

WWW-NIMBUS ## Simulated Optimization Multireacto...

Local solver used: Local (PB)
Warning: Notice that only 1 new alternatives could be generated.

Analyse Results

Select one alternative for continuation (classification), generate intermediate solutions between two selected alternatives, compare the alternat

☐ **Alternative1** : f1 : 22.64857
f2 : 5.566869

☐ **Alternative2** : f1 : 23.0
f2 : 6.09

Number of new alternatives : <= 15

Select operation

☐ Another problem ☐ Save the current problem

☐ Remove a saved problem ☒ Select one alternative (continue)

☐ Generate new alternatives ☐ Visualize the alternatives

☐ Go to solution database ☐ Show the whole problem

☐ Modify this problem ☐ Stop

Fase 4.a: indicazione delle alternative in merito alla prima classificazione

WWW-NIMBUS ## Simulated Optimization Multireactor Gasifier - Windows Internet Explorer

http://inimbus.it.jyu.fi/cgi-bin/N4/select_sol.py

File Modifica Visualizza Preferiti Strumenti ?

WWW-NIMBUS ## Simulated Optimization Multireacto...

Current Alternatives

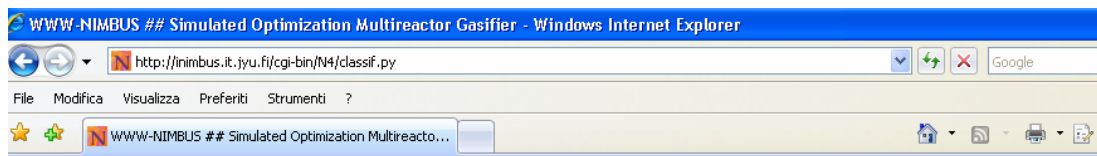
Alternative1

Function Name	Value
f1	22.64857
f2	5.566869
Variable Name	Value
x1	1.859427
x2	-1.0

Alternative2

Function Name	Value
f1	23.0
f2	6.09
Variable Name	Value
x1	2.0
x2	-1.0

Fase 5.a: stringa di risoluzione dell' NLMOP in merito alla prima classificazione



Hybrid solver used: Global 1 + Local (PB)
Warning: Notice that only 1 new alternatives could be generated.

Analyse Results

Select one alternative for continuation (classification), generate intermediate solutions between two selected alternatives, compare the alternative:

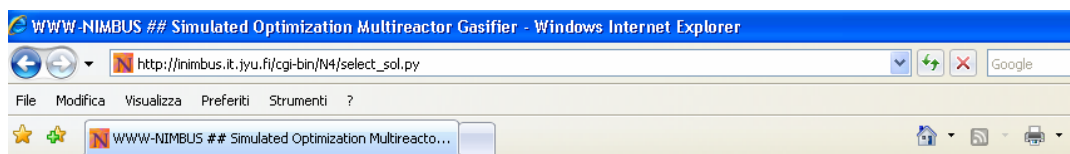
- ☐ **Alternative1** : f1 : 22.64857
f2 : 5.566869
- ☐ **Alternative2** : f1 : 22.08046
f2 : 5.2436

Number of new alternatives : <= 15

Select operation

- ☐ Another problem ☐ Save the current problem
- ☐ Remove a saved problem ☒ Select one alternative (continue)
- ☐ Generate new alternatives ☐ Visualize the alternatives
- ☐ Go to solution database ☐ Show the whole problem
- ☐ Modify this problem ☐ Stop

Fase 4.b.: indicazione delle alternative in merito alla seconda classificazione



Current Alternatives

Alternative1

Function Name	Value
f1	22.64857
f2	5.566869

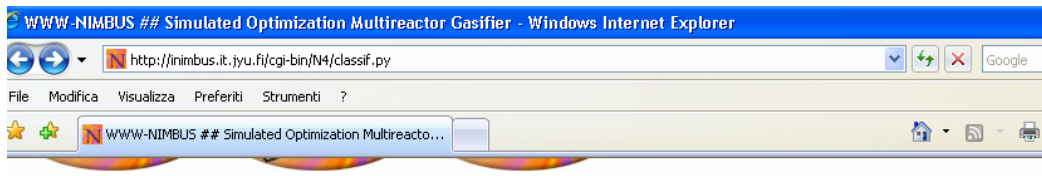
Variable Name	Value
x1	1.859427
x2	-1.0

Alternative2

Function Name	Value
f1	22.08046
f2	5.2436

Variable Name	Value
x1	1.632184
x2	-1.0

Fase 5.b.: stringa di risoluzione dell' NLMOP in merito alla seconda classificazione



Enter Classification Parameters

Aspiration functions

Enter desired level(s)

Min f2 5.2436 <= <= 5.566869

Upper and lower bound functions

Enter boundary values

Max f1 22.08 <= <= 22.64857

Select operation

- ☐ Another problem ☐ Save the current problem
☐ Remove a saved problem ☒ Calculate a new solution (continue)
☐ Correct Highest or Lowest values ☐ Show the whole problem

Fase 3.2.c: richiesta di inserimento valori desiderati delle funzioni per la terza classificazione



Enter Classification Parameters

Aspiration functions

Enter desired level(s)

Min f2 5.2436 <= <= 5.566869

Upper and lower bound functions

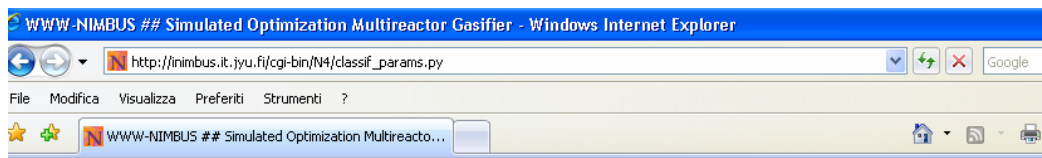
Enter boundary values

Max f1 22.08 <= <= 22.64857

Select operation

- ☐ Another problem ☐ Save the current problem
☐ Remove a saved problem ☒ Calculate a new solution (continue)
☐ Correct Highest or Lowest values ☐ Show the whole problem

Fase 3.3.c: inserimento valori desiderati delle funzioni per la terza classificazione



Hybrid solver used: Global 1 + Local (PB)
Warning: Notice that only 2 new alternatives could be generated.

Analyse Results

Select one alternative for continuation (classification), generate intermediate solutions between two selected alternatives, compare the alternatives

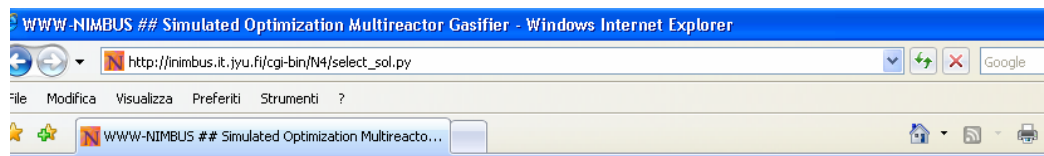
- ☐ ☒ **Alternative1** : f1 : 22.64857
f2 : 5.566869
- ☐ ☒ **Alternative2** : f1 : 22.08022
f2 : 5.2436
- ☐ ☒ **Alternative3** : f1 : 21.02199
f2 : 6.09069

Number of new alternatives : <= 15

Select operation

- ☐ Another problem ☐ Save the current problem
- ☐ Remove a saved problem ☒ Select one alternative (continue)
- ☐ Generate new alternatives ☐ Visualize the alternatives
- ☐ Go to solution database ☐ Show the whole problem
- ☐ Modify this problem ☐ Stop

Fase 4.c: indicazione delle alternative in merito alla terza classificazione



Alternative1

Function Name	Value
f1	22.64857
f2	5.566869
Variable Name	Value
x1	1.859427
x2	-1.0

Alternative2

Function Name	Value
f1	22.08022
f2	5.2436
Variable Name	Value
x1	1.632086
x2	-1.0

Alternative3

Function Name	Value
f1	21.02199
f2	6.09069
Variable Name	Value
x1	1.388266
x2	-0.8262578

Fase 5.c: stringa di risoluzione dell' NLMOP in merito alla terza classificazione

WWW-NIMBUS ## Simulated Optimization Multireactor Gasifier - Windows Internet Explorer

http://nimbus.it.jyu.fi/cgi-bin/N4/classif.py

File Modifica Visualizza Preferiti Strumenti ?

WWW-NIMBUS ## Simulated Optimization Multireacto...

NIMBUS TUTORIAL HELP

Enter Classification Parameters

Aspiration functions

Enter desired level(s)

Max f1 22.64857 <= <= 23.0

Upper and lower bound functions

Enter boundary values

Min f2 5.566869 <= <= 6.09069

Select operation

☐ Another problem
 ☐ Save the current problem
☐ Remove a saved problem
 ☒ Calculate a new solution (continue)
☐ Correct Highest or Lowest values
 ☐ Show the whole problem

Fase 3.2.d: richiesta di inserimento valori desiderati delle funzioni per la quarta classificazione



Enter Classification Parameters

Aspiration functions

Enter desired level(s)

Max f1 22.64857 <= <= 23.0

Upper and lower bound functions

Enter boundary values

Min f2 5.566869 <= <= 6.09069

Select operation

- ☐ Another problem
- ☐ Remove a saved problem
- ☐ Correct Highest or Lowest values
- ☐ Save the current problem
- ☒ Calculate a new solution (continue)
- ☐ Show the whole problem

Fase 3.3.d: inserimento valori desiderati funzioni per la quarta classificazione

WWW-NIMBUS ## Simulated Optimization Multireactor Gasifier - Windows Internet Explorer

http://nimbus.it.jyu.fi/cgi-bin/N4/classif_params.py

File Modifica Visualizza Preferiti Strumenti ?

WWW-NIMBUS ## Simulated Optimization Multireacto...

NIMBUS **TUTORIAL** **HELP**

Local solver used: Local (PB)
Warning: Notice that only 3 new alternatives could be generated.

Analyse Results

Select one alternative for continuation (classification), generate intermediate solutions between two selected alternatives, compare the alternatives

- ☐ **Alternative1** : f1 : 22.64857
f2 : 5.566869
- ☐ **Alternative2** : f1 : 22.15066
f2 : 5.248593
- ☐ **Alternative3** : f1 : 22.07994
f2 : 5.2436
- ☐ **Alternative4** : f1 : 21.02114
f2 : 6.091689

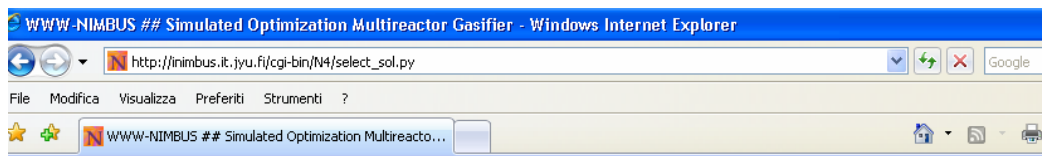
Number of new alternatives : <= 15

Select operation

☐ Another problem ☐ Save the current problem
☐ Remove a saved problem ☒ Select one alternative (continue)

start Disco rimovibile (G:) Microsoft Office... WWW-NIMBUS #... koksoy.pdf - Ado... Microsoft E

Fase 4.d: indicazione delle alternative in merito alla quarta classificazione



Alternative1

Function Name	Value
f1	22.64857
f2	5.566869
Variable Name	Value
x1	1.859427
x2	-1.0

Alternative2

Function Name	Value
f1	22.15066
f2	5.248593
Variable Name	Value
x1	1.660264
x2	-1.0

Alternative3

Function Name	Value
f1	22.07994
f2	5.2436
Variable Name	Value
x1	1.631977
x2	-1.0

Alternative4

Function Name	Value
f1	21.02114
f2	6.091689
Variable Name	Value
x1	1.390362
x2	-0.8241123

Fase 5.d: stringa di risoluzione dell' NLMOP in merito alla quarta classificazione

Nell'impostazione dell'NLMOP, si sono scelti per le variabili codificate x_1 ed x_2 , i seguenti intervalli: x_1 : $[-2, 2]$
 x_2 : $[-1, 1]$.

Si è tenuto conto della limitata possibilità concreta di variazione del guadagno del sistema di controllo.

Ai fini dell'ottimizzazione del processo si ha ampia scelta relativamente ai valori dei parametri indicati nelle quattro diverse classificazioni.

La scelta viene eseguita in base alle esigenze della gestione del processo.

CONCLUSIONI

Nella presente tesi, sono state illustrate attraverso esempi tratti dalle pubblicazioni riportate in bibliografia, le principali metodologie di ottimizzazione dei processi:

- la sperimentazione fattoriale;
- il Robust Design di Genichi Taguchi;
- il metodo della superficie di risposta (Response Surface Method) (RSM).

L'RSM è un'evoluzione della sperimentazione fattoriale: tipicamente si avvale dei piani compositi centrati (§4.3, §4.4) che si differenziano dai piani sperimentali fattoriali per l'aggiunta delle ripetizioni delle condizioni iniziali del processo, atte alla valutazione dell'errore sperimentale, e di ulteriori punti rappresentativi di opportune condizioni di prova per tener conto degli effetti del secondo ordine.

Sia la sperimentazione fattoriale che l'RSM, sono finalizzate all'ottenimento di un'espressione analitica che interpreti il comportamento del sistema, fornendo la stima della grandezza di interesse al variare dei livelli dei parametri, dando l'opportunità di controllare il processo.

Il Robust Design di Genichi Taguchi prescinde da tutto questo: si avvale di piani sperimentali congegnati in maniera tale da ridurre al minimo l'influenza delle interazioni dei parametri; la sperimentazione viene condotta sulla base di una matrice ortogonale interna che tenga conto dei livelli dei parametri di controllo e di una matrice ortogonale esterna, avente identica struttura rispetto la precedente, che tenga conto dei disturbi: le cause di variabilità della grandezza di interesse del sistema (§3.2.1). Il fulcro del metodo di Taguchi è la definizione del rapporto S/N (Signal to Noise ratio) (Segnale / Rumore): il fine della sperimentazione è l'individuazione della combinazione dei livelli dei parametri che massimizzi il rapporto S/N, rendendo il sistema il più possibile robusto, insensibile alle cause di variazione.

Nell'ambito della trattazione relativa alla RSM, è illustrato il metodo del Dual Response System (DRS) (§4.5), finalizzato alla duplice ottimizzazione nei riguardi sia del valor medio che della variabilità della risposta di un sistema: si ottiene la robustezza del processo non rinunciando all'ottenimento di un valido

modello per il controllo; oltre ai metodi di risoluzione propri della geometria analitica, tipici della RSM (§4.3.1, §4.5.1), sono indicati i metodi grafici (§4.5.2) e il NIMBUS (§5.2.2) per la determinazione dei valori ottimali dei parametri di controllo.

Ciò che differenzia la sperimentazione fattoriale dall'RSM è la diversa modalità di ottenimento delle espressioni dei modelli analitici caratterizzanti i processi: dal calcolo degli effetti e delle interazioni dei parametri (§2.3.1), tipico della prima metodologia, all'impiego del metodo numerico dei minimi quadrati (§4.2, §4.3, §4.5), caratteristico dell'RSM.

Nei riguardi dell'analisi di adeguatezza dei modelli analitici interpretativi del comportamento del sistema, sono stati proposti i metodi della probabilità cumulativa e dell'analisi dei residui (§2.3.3), unici impiegabili nel caso di piani sperimentali fattoriali privi di ripetizioni delle condizioni di prova, e l'ANOVA (Analysis of Variance) (§2.4) diffusamente impiegata in gran parte degli esempi trattati.

Nel capitolo conclusivo (§5.2.2) è mostrato come si possa ottenere l'espressione della superficie di risposta relativa alla varianza con il metodo della propagazione degli errori, nota l'espressione della superficie di risposta del valor medio, sulla base di un semplice piano sperimentale caratterizzato dalle ripetizioni delle condizioni iniziali del processo (LUCAS J.M. 1994).

L'ottimizzazione del processo di gassificazione, è stato trattato come un problema di ottimizzazione combinata, tale da:

1. massimizzare il potere calorifico inferiore del syngas prodotto;
2. minimizzarne la variabilità.

Il secondo obiettivo è necessario per ottenere la migliore possibile carburazione del motore a combustione interna ad accensione comandata del gruppo elettrogeno, necessaria per il contenimento dell'impatto ambientale del processo.

Le metodologie di ottimizzazione dei processi, basate sull'elaborazione statistica dei dati ottenuti da adeguate campagne di sperimentazione, rappresentano un settore in continua evoluzione. Nelle pubblicazioni riportate in "Journal of Quality Technology" e in "Technometrics", periodici internazionali trimestrali, sono sempre proposte applicazioni delle strategie sperimentali illustrate nei capitoli centrali del presente studio, non prive di innovative elaborazioni di statistica

avanzata, sviluppi di algoritmi di calcolo, metodi grafici, che sono strumenti potenti per la qualità di ogni tipologia di processo e progetto.

RINGRAZIAMENTI

È DOVEROSO IL RICONOSCIMENTO ALL'ING. ALESSANDRO MARIANI, ESPERTO DEI PROCESSI DI GASSIFICAZIONE, NONCHÉ PROGETTISTA DELL'INNOVATIVO IMPIANTO ILLUSTRATO NELLA TESI, PER LA DISPONIBILITÀ MOSTRATA IN FASE DI REVISIONE DEL QUINTO CAPITOLO.

BIBLIOGRAFIA

1. DE VOR, CHANG, SUTHERLAND. 1992. Statistical Quality Design and Control. *Macmillan International*;
2. TAGUCHI G.. 1987. Orthogonal Arrays and Linear Graphs. *American Supplier Institute*;
3. TAGUCHI, KONISHI, WU. 1992. Taguchi Methods. *Japanese Standards Association*;
4. DOUGLAS C. MONTGOMERY. 1991. Design and Analysis of Experiments. *Wiley*;
5. KÖKSOY O., DOGANAKSOY N. 2003. Join Optimization of Mean and Standard Deviation Using Response Surface Methods. *Journal of Quality Technology* vol.35 pp. 239-252;
6. LUCAS J.M.. 1994. How to achieve a Robust Process using Response Surface Methodology. *Journal of Quality Technology* vol.26 pp. 248-260;
7. DENNIS K. J., LIN WANZHU TU. 1995. Dual Response Surface Optimization. *Journal of Quality Technology* vol.27 pp. 34-39;
8. VINING G.G., MYERS R.H.. 1990. Combining Taguchi and Response Surface Methodology, *Journal of Quality Technology* vol.22 pp. 38-45;
9. BOX G.E.P., DRAPER N.R.. 1987. Empirical Model Building and Response Surfaces. *Wiley*;
10. DASGUPTA T., WU C.F.J.. 2006. Robust Parameter Design with Feedback Control. *Technometrics* vol.48 pp. 349-359;
11. MIETTINEN K.. 1998. Non Linear Multiobjective Optimization. *Kluwer Academic Publishers Norwell MA*;
12. SALVI G., ZANELLA E.. 1983. Gassificazione in letto fluidizzato di biomasse e scarti industriali. *La Rivista dei Combustibili* vol.37;
13. CARLINI M., LUCENTINI M.. 1995. Combustione delle Biomasse. *Università degli Studi di Roma "La Sapienza"*;

14. BACAICOA P.G., USÒN C., BILBAO R.. 2001. Downdraft Gasification of High Moisture Biomass. *1stWorld Conference on Biomass for Energy and Industry Sevilla, Spain, 5-9 June 2000 pp. 1562-1565 James & James (Science Publishers);*
15. KNOEF H.A.M., VAN DER AA B.. 2001. Development of a Low Cost, Reliable Wood Gasifier Plant for Rural Application. *1stWorld Conference on Biomass for Energy and Industry Sevilla, Spain, 5-9 June 2000 pp. 980 – 982 James & James (Science Publishers) Ltd;*
16. STOHOLM P., NIELSEN R.G., NYGAARD H., TOBIASEN L., FOCK M.W., RICHARDT K., HENRIKSEN U.. 2001. Low Temperature CFB Gasifier, Conceptual Ideas, Applications and First Test Results. *1stWorld Conference on Biomass for Energy and Industry Sevilla, Spain, 5-9 June 2000 pp. 1893 – 1896 James & James (Science Publishers) Ltd.*