

PROCEDURA DI STIMA DEI PARAMETRI DI UN MODELLO DI RIMOZIONE DEI PIT E DELLE AREE PIANE DI UN DEM

M. Santini¹, A. Petroselli², F. Nardi³, S. Grimaldi^{2,3}

- (1) Dipartimento DISAFRI, Università degli Studi della Tuscia, via Camillo de Lellis snc, 01100 Viterbo, monia.santini@unitus.it
- (2) Dipartimento GEMINI, Università degli Studi della Tuscia, Via Camillo De Lellis, s.n.c., 01100 Viterbo, Italia – e-mail: salvatore.grimaldi@unitus.it
- (3) Centro H2CU, Sapienza Università di Roma, Via Eudossiana 18, 00184 Roma, Italia

SOMMARIO

I modelli digitali del terreno (DEM) sono affetti da errori di varia natura. I più comuni, dal punto di vista idrologico, sono gli avvallamenti (o pit) e le aree a pendenza nulla poiché impediscono la propagazione dei deflussi superficiali. L'origine di tali imperfezioni deriva sia dalle tecniche di rilievo o interpolazione utilizzate per costruire il DEM, sia dai metodi di trattamento preliminare applicati per ottenere DEM idrologicamente corretti. Un'impropria analisi di tali punti può influenzare significativamente la planimetria ed il relativo profilo altimetrico dei percorsi di drenaggio, nonché la stima di indici idrologici e geomorfologici che dipendono in genere dalla distribuzione delle pendenze e delle aree contribuenti. Recentemente è stato introdotto in letteratura un metodo di correzione del DEM fisicamente basato PEM4PIT (Physically Erosion Model for PIT removal), che sembra fornire risultati più realistici rispetto ai metodi tradizionali. In questa memoria si presenta una procedura per stimare i tre parametri del PEM4PIT e si mostrano alcune applicazioni sia per validare tale procedura di stima, sia per evidenziare le caratteristiche peculiari di tale metodo di correzione.

1 INTRODUZIONE

In genere nelle applicazioni idrologiche le aree piane presenti nel Modello Digitale del Terreno (DEM) non vengono considerate come elementi naturali del territorio, ma come zone spurie, non realmente rappresentative della superficie topografica reale, e conseguentemente sono analizzate e rimosse dal dato originale per produrre un DEM idrologicamente corretto per cui è possibile definire la direzione di propagazione dei deflussi superficiali. Nella maggior parte dei casi le aree pianeggianti sui DEM derivano o dai metodi di interpolazione usati per la produzione del DEM stesso, o dal troncamento del dato nel passaggio da decimale ad intero, o da problematiche inerenti gli strumenti e le tecniche di acquisizione da sensori in remoto (aerei, satellitari) che generano vuoti nei dati. Un altro fattore che determina una significativa presenza di aree piane è dato dalle procedure tradizionali di rimozione delle depressioni artificiali (pit) (Jenson and Domingue, 1988; Grimaldi et al., 2007; Nardi et al., in revisione) che consistono nel riempimento di tali avvallamenti (metodo *flooding*) fino a determinare

una superficie pianeggiante.

La presenza di aree a pendenza nulla nei DEM di più comune utilizzo è significativa. Dall'analisi del DEM della penisola italiana (isole escluse) prodotto dall'IGM (Istituto Geografico Militare) ad una risoluzione di 75 m, su una superficie complessiva di circa 251.634 km² si stima una superficie pianeggiante, ottenuta tramite la funzione SLOPE di ArcInfo (Burrough, 1986; ESRI, 1990), pari al 7% della estensione totale che diventa addirittura del 20% dopo la rimozione dei pit con il metodo *flooding*, senza considerare i 5000 km² di superficie costituita dai laghi effettivamente presenti sul territorio. Inoltre tale stima è approssimata per difetto poiché l'algoritmo della funzione SLOPE media la "reale" pendenza di deflusso intesa quest'ultima come pendenza massima calcolata sulle 8 celle circostanti la cella in esame. Tale problematica diviene più rilevante se si considera che le aree pianeggianti sono concentrate nelle fasce ripariali proprio dove è maggiore l'interesse dei modelli idrogeomorfologici (Nardi *et al.*, 2006).

Di recente è stato introdotto un nuovo metodo fisicamente basato per il trattamento delle aree piane e dei pit, denominato PEM4PIT (Physical Erosion Model for PIT removal; Grimaldi *et al.*, 2007; Nardi *et al.*, in revisione).

In questa memoria si propone una metodologia per stimare i 3 parametri necessari all'applicazione del PEM4PIT. Nel paragrafo 2 si descrivono le equazioni ed i parametri del modello, nel paragrafo 3 si illustra la procedura proposta per la stima dei parametri ed infine nel paragrafo 4 si analizzano numerosi casi di studio utili sia a verificare l'attendibilità e le performance del metodo proposto, sia ad evidenziare ulteriormente le caratteristiche del PEM4PIT.

2 MODELLO PEM4PIT

PEM4PIT è un metodo di interpolazione per il trattamento dei DEM basato sulla rappresentazione fisica semplificata, a scala di bacino, dei fenomeni erosivi fluviali e diffusivi dei versanti.

L'algoritmo implementa un modello semplificato di evoluzione della superficie topografica (Willgoose *et al.*, 1991 a e b; Moglen & Bras, 1995; Tucker & Bras, 1998), secondo il quale c'è equilibrio dinamico tra l'innalzamento tettonico ed i flussi di materiale solido prodotti dall'erosione fluviale e dalla diffusione superficiale, basandosi sulla seguente equazione differenziale:

$$0 = U - \beta A^\theta S + D \nabla^2 z \quad (1)$$

dove i termini di destra rappresentano rispettivamente il sollevamento tettonico (U), l'erosione fluviale (con A : area contributiva della generica cella; S : pendenza; θ coefficiente di scala che equivale all'esponente della nota relazione "slope-area" ed assume valori variabili tra 0.3 e 0.6 (Tarboton *et al.*, 1991); e β : erodibilità superficiale) ed i processi diffusivi (D : coefficiente di diffusività; $\nabla^2 z$: curvatura). In particolare, β , θ e D sono variabili nello spazio e legati alla natura della superficie mentre U , legato alla scala di riferimento dei processi geologici, viene ritenuto costante per il bacino idrografico. Imponendo un generico valore dell'innalzamento tettonico U ($U = 1$), e normalizzando per U , la (1) si semplifica ulteriormente, perdendo il significato fisico assoluto dei parametri β e D . I parametri del modello vengono così ridotti a tre: β , D e θ . Si rimanda agli articoli Grimaldi *et al.*, 2004, 2005 e 2007 per la descrizione dei dettagli

relativi alla procedura di integrazione della (1), applicata per correggere tutti i punti a pendenza negativa e nulla.

3 STIMA DEI PARAMETRI β , D E θ

In tale lavoro si propone una metodologia di stima a priori dei parametri del PEM4PIT che a partire dallo schema numerico della (1) ottimizzi i risultati in relazione al numero di punti modificati e alla similitudine del reticolo di drenaggio risultante con quello ottenuto dalla digitalizzazione di carte tematiche o ortofoto.

Il modello di erosione semplificato (1) considera due componenti erosive: quella fluviale e quella diffusiva. La prima componente è predominante nelle zone del bacino di accumulo, ad alto contributo d'area, dove risiede il reticolo idrografico e comunque all'interno della fascia ripariale, mentre la seconda predomina nelle aree a basso contributo d'area, sui versanti, dove i processi diffusivi in genere sono prevalenti. Nelle zone intermedie di raccordo tra quelle di trasferimento e quelle di accumulo si combinano le due componenti.

Il modello proposto, una volta distinto il reticolo dai versanti ed escludendo le celle affette da errore (pit, aree piane o quasi piane), applica la seguente formula alle celle individuate come 'canale':

$$0 = 1 - \beta A^\theta \left(\frac{z - z_d}{\Delta l} \right) \quad (2)$$

con cui si stima il parametro β isolando la componente di erosione fluviale; mentre per le celle individuate come 'versante' viene applicata la seguente formula:

$$0 = 1 + \frac{4D}{\Delta x^2} (\bar{z} - z) \quad (3)$$

con cui si stima il parametro D isolando la componente di erosione diffusiva.

Nelle due formule z rappresenta la quota altimetrica della generica cella, z_d la quota della cella dove è diretto il deflusso, Δx la risoluzione del DEM, Δl la distanza orizzontale che separa z e z_d ; infine \bar{z} la media delle quattro celle adiacenti in direzione cardinale (Nord-Sud-Est-Ovest) rispetto alla cella centrale. Dopo aver stimato tutti i valori di β e D nei rispettivi domini, si calcolano le medie di entrambi i parametri.

A tal fine sono necessarie alcune ipotesi sul valore da attribuire a θ e su come identificare le celle canale e versante.

Riguardo θ ci sono due valide alternative: la prima consiste nello stimare θ seguendo l'approccio descritto in *Tarboton et al.* (1991), cioè eseguendo una regressione sul grafico 'slope-area' nella parte rappresentativa dei processi fluviali. Tale procedura sebbene sia teoricamente corretta presenta alcuni limiti pratici che rendono molto aleatorio il valore ottenuto. La seconda alternativa, basata sulla interdipendenza di β e θ , propone di attribuire a priori un valore a θ e di stimare β di conseguenza applicando la (2). In questo studio si è optato per il secondo caso e sono stati usati tre valori di θ : 0.3, 0.4, 0.5.

Riguardo la scelta delle celle 'canale', per l'estrazione della rete idrografica del bacino è stato applicato il metodo detto della *curvature/drop analysis* (*Tarboton & Ames*, 2001): ovviamente sono state escluse tutte le celle "pit", tutte le celle a pendenza

nulla e per evitare di considerare comunque celle affette da errore sono state trascurate tutte le celle la cui pendenza di deflusso è minore di 0.005. Le celle ‘versante’ sono state definite come le zone che hanno un contributo d’area drenante minore di 5000 m^2 . Di queste saranno considerate solo quelle con $(z-z_c)>0.25$ (per evitare celle pianeggianti), escludendo le celle che forniscono valori di $D<50$ che rappresenterebbero situazioni per cui si verificano forti dislivelli causati o da un errore del DEM o da una cella per la quale sono già significativi gli effetti dell’erosione fluviale.

4 CASI DI STUDIO

Sono stati opportunamente selezionati 25 bacini di caratteristiche eterogenee, rappresentativi di condizioni climatiche differenti, drenanti aree di diversa estensione, e utilizzando differenti tipologie di DEM ed in particolare quelli di nuova generazione ottenuti da sensore remoto ASTER (NASA JPL, 2008) e DEM di tipo tradizionale quale l’IGMI (Istituto Geografico Militare, 2003), contraddistinti da risoluzione e precisione diverse. In Tabella 1 sono riportati, oltre alle caratteristiche generali dei vari bacini, anche il numero di punti a pendenza nulla, il numero di pit ed il numero di punti a pendenza nulla dopo aver applicato la procedura di rimozione dei pit del metodo *flooding* del software ArcGIS (Esri, 1990).

La procedura di stima dei parametri descritta al paragrafo precedente è stata applicata su tutti i bacini imponendo 3 valori di θ al fine di valutare quanto tale variazione incida sul risultato finale e verificare se effettivamente si può imporre a priori un valore fisso del parametro. In Tabella 2 sono riportati rispettivamente i valori stimati di D e di β imponendo $\theta=0.3, 0.4$ e 0.5 ; viene inoltre riportato il numero di celle selezionate, visto che non sono considerate nel calcolo le celle a bassa pendenza e le depressioni secondo il criterio precedentemente descritto.

Un’analisi quantitativa delle performance del PEM4PIT è riportata in Tabella 3, espressa attraverso due indici: il numero di punti modificati ed il numero di punti in cui il reticolo di drenaggio stimato con il metodo standard (Jenson & Domingue, 1988; ESRI, 1990) coincide con quello ottenuto applicando il metodo PEM4PIT. Si consideri che la procedura standard restituisce DEM con punti aventi pendenza nulla mentre PEM4PIT attribuisce una pendenza diversa da zero a tutti i punti del DEM corretto, congruentemente con la teoria del modello implementato dalla (1). Dai risultati ottenuti si evince che: (1) i set di parametri stimati corrispondono a reticoli idrografici sempre accettabili senza alterare macroscopicamente il dato originale; (2) l’utilizzo di un valore di θ fissato a priori non comporta variazioni significative sui risultati finali dell’applicazione.

I risultati dell’applicazione della metodologia proposta vengono qui di seguito descritti nel dettaglio per il caso di studio del bacino del Rio Torbido, affluente minore del Fiume Tevere sito nella Provincia di Viterbo. In Figura 1 sono evidenziate le aree a pendenza nulla prima e dopo l’applicazione della procedura standard di ArcInfo di rimozione dei pit, con le relative percentuali. La Figura 2 mostra il confronto tra i reticoli di drenaggio ottenuti dopo l’applicazione della procedura standard e del PEM4PIT, usando alcuni parametri stimati ($\theta=0.5, \beta=0.01, D=130$) ed utilizzando per l’identificazione della rete idrografica in entrambi i casi un’area contributiva minima di 0.3 km^2 . Infine la Figura 3 mostra i profili altimetrici di un tratto dei due reticoli.

DEM	Origine	Risoluzione (m)	Precisione	Numero di celle	numero pit	celle con pendenza	
						nulla pre-fill	nulla post-fill
a01	Aster	30	intero	52214	32	302	2691
a03	Aster	30	intero	26456	30	344	2223
a04	Aster	30	intero	27004	20	114	1035
a05	Aster	30	intero	37347	14	281	1317
a07	Aster	30	reale	25100	125	1	2736
a10	Aster	30	reale	39629	193	0	2690
arrone	IGMI	20	intero	8741	38	1334	1849
beach	NED	40	reale	39932	755	52	4457
lost90	NED	90	intero	71210	305	238	976
minore	IGMI	20	intero	12961	21	1092	1339
montana	NED	30	reale	92908	2655	443	14993
monte	IGMI	20	intero	18418	68	2054	2856
naja	IGMI	20	intero	30021	48	1793	3150
ortacesus	IGMI	25	reale	336844	574	23881	44724
padru	IGMI	25	reale	124807	175	2500	6417
pastena	Regione Lazio	40	intero	25569	31	875	5251
rigo	IGMI	20	intero	210629	781	28580	40762
rio torbido	IGMI	20	intero	154178	387	12954	19627
sangiorgio	Aster	30	reale	56580	118	1	1911
sr2	NED	30	reale	36641	187	309	2123
subtolt	NED	60	reale	57145	667	124	3356
terranova	Aster	30	intero	41748	30	381	1430
torres	IGMI	25	reale	70756	85	9791	14058
tuscania	IGMI	20	intero	60340	92	22282	24839
we38	NED	30	reale	8093	24	1	113

Tabella 1: Elenco dei bacini esaminati e delle loro principali caratteristiche

bacino	D media	num. celle per stima D	$\theta = 0.3$	$\theta = 0.4$	$\theta = 0.5$	num. celle per stima β
			β media	β media	β media	
a01	288	21388	0.21	0.05	0.01	893
a03	305	10017	0.37	0.12	0.04	1147
a04	278	10363	0.21	0.06	0.02	842
a05	315	12527	0.24	0.07	0.02	1257
a07	332	13423	0.65	0.19	0.06	846
a10	372	20700	0.83	0.25	0.08	1887
arrone	146	3244	0.68	0.24	0.08	342
beach	587	18406	0.97	0.27	0.07	1550
lost90	657	26448	0.21	0.05	0.01	2481
minore	144	5157	0.44	0.14	0.05	432
montana	387	47320	0.63	0.14	0.03	435
monte	142	6813	0.33	0.10	0.03	379
naja	140	11463	0.41	0.14	0.05	1437
ortacesus	283	136391	0.49	0.11	0.03	3112
padru	227	63859	0.40	0.11	0.03	3339
pastena	390	9123	0.23	0.06	0.02	882
rigo	139	79431	0.19	0.05	0.01	1094
rio torbido	130	58545	0.18	0.05	0.01	941
sangiorgio	334	27796	0.37	0.11	0.03	2484
sr2	457	11432	0.73	0.22	0.07	1607
subtolt	605	22472	0.30	0.08	0.02	4199
terranova	181	20340	0.17	0.05	0.01	1931
torres	267	32077	0.78	0.26	0.09	2921
tuscania	163	15304	0.55	0.17	0.05	1032
we38	421	3179	0.84	0.28	0.10	668

Tabella 2: Valori di D e β medi ottenuti dalla procedura di stima del parametro per ogni bacino.

Dai risultati ottenuti si confermano alcune considerazioni emerse anche in altri lavori già citati sull'argomento:

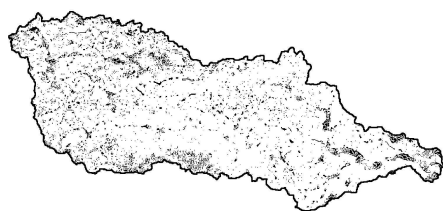
- (a) i DEM sono affetti da numerosi punti a pendenza nulla che aumentano sensibilmente dopo l'applicazione della procedura standard di rimozione dei "pit";
- (b) il reticolo estratto dal DEM corretto con PEM4PIT non risulta sostanzialmente

differente dal punto di vista planimetrico rispetto al reticolo estratto con la procedura standard, ma ha un andamento sinuoso più realistico non mostrando i tratti a pettine e gli alvei paralleli tipici dei DEM con zone pianeggianti corretti con il metodo flooding;

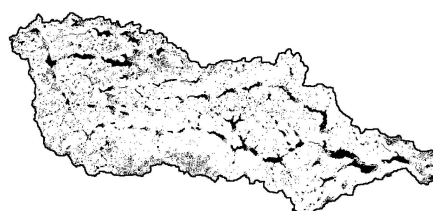
(c) il profilo altimetrico del reticolo estratto dopo l'applicazione del PEM4PIT risulta più realistico rispetto a quello derivato applicando il metodo tradizionale, non presentando tratti a pendenza nulla.

Bacino	$\theta = 0.3$		$\theta = 0.4$		$\theta = 0.5$	
	punti modificati	punti coincidenti	punti modificati	punti coincidenti	punti modificati	punti coincidenti
	PEM4PIT	reticoli	PEM4PIT	i reticoli	PEM4PIT	reticoli
a01	4510	962	4549	952	4662	939
a03	4067	324	4408	331	4396	312
a04	1914	490	1958	462	1939	455
a05	2397	777	2441	773	2539	770
a07	3833	448	3974	430	4140	448
a10	5658	623	6877	582	6749	594
arrone	3539	42	3682	47	3762	52
beach	6645	864	7792	789	8780	734
lost90	7416	4815	7422	4804	8315	4634
minore	2622	119	2665	112	2728	105
montana	36667	701	39826	628	45801	504
monte	4630	135	4752	133	4844	146
naja	7218	135	7813	141	7902	109
ortacesus	93095	3830	97663	3738	100210	3671
padru	16132	2093	17807	2024	18469	2004
pastena	7160	553	7306	560	7374	576
rigo	86484	1120	89146	1088	89353	1100
rio torbido	47426	988	49193	968	50575	940
sangiorgio	2914	1160	3058	1159	3062	1135
sr2	3869	597	4011	571	4335	566
subtolt	6285	2515	6509	2486	7326	2358
terrano	2093	1113	2164	1113	2141	1109
torres	24317	337	25743	312	26967	290
tuscania	42162	125	42927	113	43365	121
we38	360	130	337	142	328	151

Tabella 3: Numero di punti modificati dal PEM4PIT e numero di punti coincidenti tra i reticoli estratti dopo l'applicazione del metodo *flooding* e del PEM4PIT.



Aree piane prima del pit filling (8.40%)



Aree piane dopo il pit filling (12.35%)

Figura 1: Distribuzione delle aree a pendenza nulla e relative percentuali

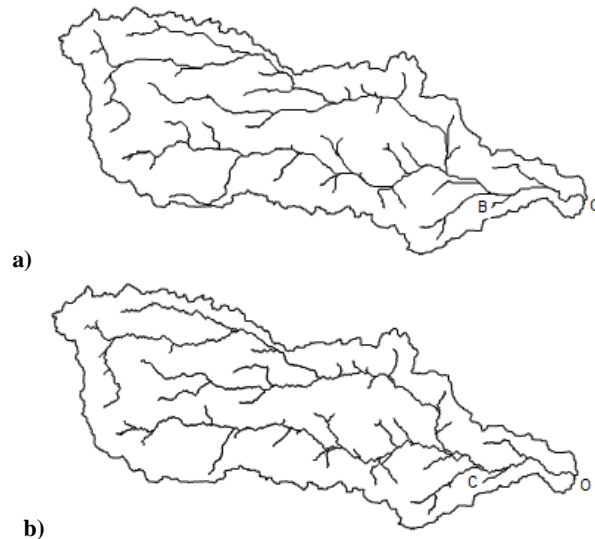


Figura 2: I reticoli idrografici estratti: a) ArcInfo, b) PEM4PIT

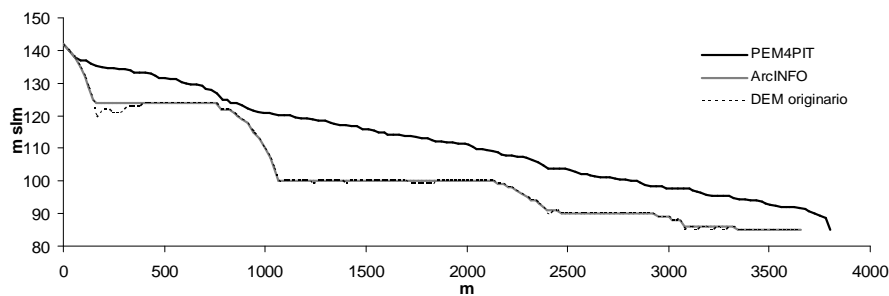


Figura 3: Confronto del profilo altimetrico per il tratto BO del reticolo estratto con il metodo di ArcInfo (Figura 2a), il tratto CO estratto sul DEM corretto con il PEM4PIT (Figura 2b) e, per confronto, il profilo estratto dal DEM originario sullo stesso percorso del tratto BO.

5 CONCLUSIONI

In questo lavoro si è descritta una procedura di stima dei parametri di un modello semplificato di rappresentazione dei processi erosivi e diffusivi applicato per la correzione delle zone spurie di un DEM. Tale metodo, denominato PEM4PIT, modifica i punti con pendenza di deflusso pari a zero (zone pianeggianti) e negativa (depressioni artificiali) imponendo un'elevazione, e di conseguenza una pendenza locale, congruente con il modello di equilibrio dinamico della superficie implementato, che si basa sul bilanciamento tra i processi fisici di erosione e diffusione del materiale superficiale con il sollevamento tettonico a scala di bacino. La capacità del terreno di essere modellato da tali fenomeni è rappresentata da due coefficienti legati all'erodibilità delle zone vallive, ossia i parametri β e θ , ed un coefficiente che controlla i processi diffusivi caratteristici dei versanti, ossia il parametro D . La procedura proposta per la stima automatica dei parametri β e D a partire dal DEM si basa sulla suddivisione del bacino

in due zone, una in cui vale solo la componente erosiva ed un'altra in cui prevale solo la componente diffusiva. In tal modo è possibile ottenere due equazioni esplicite valide rispettivamente per una zona o l'altra e, di conseguenza, assegnare a tali celle il valore rispettivo di β (una volta fissato θ) ed il valore di D . Una volta ottenuta la distribuzione spaziale rappresentativa della variazione di β e D si è scelto di utilizzare il valore medio di ciascun parametro come valore caratteristico del bacino. I 25 casi di studio analizzati confermano la possibilità di utilizzare efficacemente tale procedura di stima automatica dei parametri β e D fissando a priori il valore di θ . I risultati ottenuti risultano incoraggianti nel poter utilizzare PEM4PIT nella correzione dei DEM per applicazioni idrologiche come valida alternativa alle procedure standard.

RINGRAZIAMENTI

Parte del presente lavoro è stato svolto nell'ambito della convenzione dal titolo "Studio preliminare del rischio idraulico per i bacini idrografici del Rio Torbido, Torrente Rigo, Torrente Veza e bacini minori inclusi nel territorio della Provincia di Viterbo", stipulata tra L'Università degli Studi della Tuscia – Dipartimento GEMINI, la Provincia di Viterbo e l'Autorità di Bacino Nazionale del Fiume Tevere. Gli Autori ringraziano sentitamente gli esponenti di entrambe le Istituzioni per la collaborazione e la disponibilità ricevute.

BIBLIOGRAFIA

- Burrough, P.A. Principles of Geographical Information Systems for Land Resources Assessment. Oxford University Press, New York, 1986 p. 50.
- ESRI. Understanding GIS: The ArcInfo Method, 400 pp., ESRI Press, Redlands, Calif, 1990.
- Grimaldi, S., Teles, V. & Bras, R.L. Sensitivity of a physically-based method of terrain interpolation to variance of input data and to the constraint of an enforced surface drainage direction, *Earth Surface Processes and Landform.*, 29 (5), 2004, 587-597.
- Grimaldi, S., Teles, V. & Bras R.L. Preserving First And Second Moments of The Slope Area Relationship During The Interpolation Of Digital Elevation Models, *Advances in Water Resources*, 28, 2005, 583-588.
- Grimaldi, S., Nardi, F., Di Benedetto, F., Istanbuluoglu, E. & Bras, R.L. A physically-based method for removing pits in digital elevation models, *Advances in Water Resources*, 30, 2007, 2151-2158.
- Istituto Geografico Militare Italiano (IGMI). Dati altimetrici in formato MATRIX, http://www.igmi.org/pdf/info_matrix2003.pdf, 2003.
- Jenson, S.K. & Domingue, J.O. Software tools to extract topographic structure from digital elevation data for geographic information system analysis, *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, 54(11), 1988, 1593-1600.
- Moglen, G.E. & Bras, R.L. The effect of spatial heterogeneities on geomorphic expression in a model of basin evolution, *Water Resources Research*, 31 (10), 1995, 2613-2623.
- Nardi, F., Vivoni, E.R. & Grimaldi, S. Investigating a floodplain scaling relation using a hydrogeomorphic delineation method, *Water Resources Research*, 42, W09409, 2006, doi:10.1029/2005WR004155.
- Nardi, F., Grimaldi, S., Santini, M., Petroselli, A. & Ubertini, L. (in revisione), "The Treatment of Flat Areas by DEM-based Flow Direction Methods: Comparison of Concentrated and Dispersive Algorithms in Hydrogeomorphic Applications", *Hydrological Science Journal*.
- NASA Jet Propulsion Laboratory (JPL). <http://asterweb.jpl.nasa.gov/>, 2008
- Tarboton, D.G. & Ames, D.P. Advances in the mapping of flow networks from digital elevation

- data. In: World Water and Environmental Resources Congress, Orlando, Florida, May 20-24, 2001, ASCE.
- Tarboton, D.G., Bras, R.L. & Rodriguez-Iturbe, I. On the extraction of channel networks from digital elevation data. *Hydrological Processes* 5(1), 1991, 81-100.
- Tucker, G.E. & Bras, R.L. Hillslope processes, drainage density, and landscape morphology, *Water Resources Research*, 34 (9), 1998, 2037–2051.
- Willgoose, G., Bras, R.L. & Rodriguez-Iturbe, I. A coupled channel network growth and hillslope evolution model 1. Theory. *Water Resources Research*, 27(7), 1991a, 1671-1684.
- Willgoose, G., Bras, R.L. & Rodriguez-Iturbe, I., A coupled channel network growth and hillslope evolution model 2. Nondimensionalization and application. *Water Resources Research*, 27(7), 1991b, 1685-1696.